PAULLI FRISII

MEDIOLANENSIS

CONGR. D. PAULLI CLER. REG.

IN PISANO GYMNASIO PUBLICI PROFESSORIS,

SOCIETATIS LONDINENSIS, BONONIENSIS INSTITUTI, ET PETROPOLITANÆ, AC BEROLINENSIS SCIENTIARUM ACADEMIÆ SOCII

DISSERTATIONUM VARIARUM

Tomus Secundus,

IN QUO HABENTUR

1. De inæqualitatibus motus Planetarum omnium in orbitis circularibus, atque ellipticis Libri duo.
2. De methodo Fluxionum Geometricarum, & ejus usu in investigandis præcipuis curvarum affectionibus Dissertatio.
3. Meditationes quædam Metaphysicæ.

LUCÆ MDCCLXI.

Apud Vincentium Junctinium.

Cum Approbatione.

SUMPTIBUS JOANNIS RICCOMINI.

AUGUSTINO
LAUMELLINO
JANUENSIS REIPUBLICÆ DUCI
&c. &c. &c.

PAULLUS FRISIUS

FELICITATEM.

UT meas haſce diſſertationes inſcriptas Tibi, ac dedicatas velim, Serenissime

Princeps, non ſummi Principatus inſignia, non aviti generis ſplendor, non rerum domi, foriſque præclare geſtarum gloria, ſed ipſa facit ſcientia, qua excellis, diſciplinarum Mathematicarum. Graviſſima quidem munera, & Legationes illæ, quas in maxima temporum difficultate Patriæ nomine obiiſti, & Magiſtratus omnes, quibus integerrime defunctus es, Te Tuis Civibus apprime charum ad honorem Regium, quem tenes, evexerunt. Civilium vero, & politicarum virtutum laude apud exteras quoque nationes, viroſque Principes, ac Reges potentiſſi-

mos

mos ſic præſtitiſti, ut in pretio, & admiratione omnibus fueris. At acerrimi ingenii vis illa Tua, & facultatum abſtruſiſſimarum cognitio, Te adeo celebrioribus ætatis noſtræ Philoſophis approbarunt, commendaruntque, ut cum ab omni aſſentationis genere abhorreant, atque hominum merita non ex originis nobilitate, aut ex ſubſidio divitiarum, ſed ex virtute metiri ſoleant, tamen & Tibi ſint addictiſſimi, & Te unum ex ipſis præcipuo loco ſuſpiciant. Cum enim ab ineunte ætate Poëſim, & amœniores litteras non ſine nominis celebritate excolueris,

poſtmodum ad altiora contendens Piſano otio, & vacatione a publicis muneribus Lutetiæ Pariſiorum ſic profeciſti, ut ſummis Geometris in inveſtigatione rerum abditiſſimarum comes lateri ſemper hæreres. Quibus quidem in ſtudiis quos ipſe progreſſus feceris, & illi plane ſenſerunt, & ego etiam per me, quem non ultimo habes loco inter Tuos, haud ægre potui intelligere, cum & Januæ, & Florentiæ ad Te familiariter accedentem benigne excipiens de calculis, & æquationibus ſermones inter epulas etiam graviſſimos ſerebas. Quarum rerum ſuaviſſima

recor-

recordatio cum nunquam ſit in animo meo interitura, tum facit modo ut hanc libentiſſime arripiam mihi præſtitam occaſionem grati animi ſenſus ſignificandi. Tibi etiam hoc alterum volumen mearum diſſertationum, in quo potiſſimum de inæqualitatibus cæleſtium corporum, de æquationibus mediorum motuum, de viciſſitudinibus velocitatis, nodorum, inclinationis orbitæ ſermo eſt, peculiari ratione debere me intelligebam. Cum enim maxima Tibi ſtudiorum, officiorumque neceſſitudo intercedat cum ſummo illo, & præcipuo totius Galliæ Philoſopho, qui primus o-

mnium

mnium Problemata hæc difficillima aggressus est, quique novam theoriam Præcessionis Æquinoctiorum, & Nutationis Terrestris Axis sub Tuis Auspiciis prodire voluit; mihi facile persuadebam nihil animo Tuo jocundius a me proficisci posse, quam si de aliis gravitatis phænomenis, & Planetarum aberrationibus differerem. Tu qui de ingenii cujusque viribus, Serenissime Princeps, libentius judicas, quam de capite, & fortunis Civium, nec gravissimis occupationibus sic distineris ut ad alia quoque intendere non possis animum, subcisivas aliquot horas surripere Tibi ipsi poteris ut

per-

perſpicias ſi quid modo aut prorſus novum, aut elegantius quam antea pertractatum prodeat in amœniſſimis hiſce ſtudiis cæleſtis Phyſicæ: quod & qua polles calculorum ſubducendorum dexteritate facile continget. Ego vero felicem ſatis, fortunatumque me exiſtimaverim, ſi ſtudia hæc mea, quantulacumque ea demum ſint, in Te uno & Magnanimi Principis Patrocinium nacta fuerint, & ſummi Mathematici approbationem.

PAULLI FRISII
DE
INÆQUALITATIBUS
MOTUS
PLANETARUM OMNIUM
IN ORBITIS CIRCULARIBUS
ATQUE ELLIPTICIS
Libri Duo,

QUORUM SPECIMEN ANNO MDCCLX. PROXIME ACCESSIT PRÆMIO REGIÆ PARISIENSIS ACADEMIÆ.

DE INÆQUALITATIBUS MOTUS PLANETARUM.

Cogitavi diu mecum ipse, & duobus fere ab hinc annis diligentius investigavi utrum, & qua ratione eadem methodus, qua divinus Newtonus, & post Newtonum Machinius, & Walmeslejus inæqualitates motuum Lunarium facile adeo, eleganterque explicarunt, Planetarum aliorum inæqualitatibus explicandis pari felicitate aptari posset, ut expedita jam, atque amplissima haberetur Planetarii systematis tractatio, & Lunæ theoria evaderet generalis theoriæ peculiaris quidam casus, ac veluti corollarium. Scilicet cum Lunarium Problematum solutiones minus obscuras, & complicatas reddant peculiares eæ conditiones quod Planeta attrahens orbita sua Planetæ attracti orbitam circumambiat, & distantiam a centro prope infinitam habeat, & singulis Planetæ attracti revolutionibus veluti quiescens in dato loco orbitæ suæ spectari possit; tentare volui an eodem ordine, ac methodo magnum attra-

ctionum Problema casibus aliis accomodaretur, in quibus duo Planetæ infinito intervallo a se invicem non distant, & qui attrahit Planeta centro totius motus propinquior, aut remotior est quam qui attrahitur, & alteruter, aut uterque data proportione velocitatum in circulari, aut elliptica orbita movetur. In quo quidem me de iis omnibus benemereri posse existimabam, qui cum plura hujus generis problemata a Geometris celeberrimis Alembertio, atque Eulero soluta, & ad Cometarum etiam theoriam ab ingeniosissimo Clairautio traducta habeant, planiorem tamen tractationem desiderarent, qua sine tot sublimioris Geometriæ, & Algebræ præsidiis assequi posset qui sese invicem Planetæ accelerent, aut retardent, & quas gignant inclinationis orbitæ, nodorum, aliorumque mediorum motuum vicissitudines. Id quoque Parisiensis Scientiarum Academia indicare visa est, cum anno 1748 post præmium Cl. Eulero adjudicatum eamdem de inæqualitatibus Jovis & Saturni quæstionem novo oblato præmio rursus proposuit, eamque solutionem expostulavit, quæ non solum judicibus sapientissimis, aliisque qui solvendo problemati jam pares essent, sed majori insuper lectorum numero, & minore studio, ac labore accomodaretur.

Cum in hisce igitur naturæ legibus evolvendis naturæ ipsius, quæ leges tulit, simplicitatem, brevitatemque aliquo modo imitari vellem, illico animadverti supervacaneum hic esse altius repetere rem omnem, rigore Geometrico persequi, & scrupulose ad calculum revocare non minus quam si de aliquo Geometrico, aut Analytico Problemate ageretur. Sic enim habeo: problemata hujus generis non nisi approximationibus solvi posse, approximationesque in universa Astronomia, & cælesti Physica sufficere. Hæc duo ii omnes rata, atque explorata esse intelligent, qui in praxi Astronomica versati sunt, atque alias Problematum similium solutiones ad praxim redactas consulunt, in quibus cum plura occurrant de motu trium corporum in se invicem agentium generatim, & ingeniose dicta; ubi speciebus numeri substituuntur, ubi de tabulis construendis, aut peculiaribus motuum æquationibus supputandis agitur, alias præ aliis quantita-

titates negligere, aliisque approximationibus uti necesse est. Alembertius etiam in animadversionibus, quas postremæ editioni suæ Dynamicæ adjecit, cum de coefficientibus æquationum Problematis trium corporum exhibendis dissereret, adnotavit Analysim, & Geometriam hocce in Problemate deficere, nec nisi observationibus solutiones posse comprobari. Quo cum nihil plane laudis detrahatur generalibus aliis Lunarium Problematum solutionibus, tum mihi novam laudem Newtonianæ methodo, quæ cum observationibus adeo convenit, accedere visum est, novumque accessit studium methodi ipsius amplificandæ, evadendique triplicem illam difficultatem, quæ sese offert statim problemate a Lunaribus inæqualitatibus ad superiorum, inferiorumque Planetarum inæqualitates alias traducto.

Primo autem quod pertinet ad directiones virium perturbatricium minime parallelas inter se, & finitam rationem distantiarum, quas duo quilibet Primarii Planetæ in se agentes a Sole habent, manifestum est quod cum Newtonus primum dumtaxat terminum supputaverit illius seriei, quæ vires Solis tanto intervallo a Terra dissiti, & Lunares motus perturbantis exprimit; plures accipi debent termini serierum aliarum, quæ exprimunt vires alias perturbatrices Planetarum duorum Primariorum. Hoc vero opus maximum, & labor est, ut eæ instituantur series, quæ licet Algebricam summam respuant, satis tamen pro praxi Astronomica convergant, & quarum dumtaxat aliquot priores termini sumi possint. Si attractricium virium expressio, quæ prima fronte sese offert, accipiatur, ea simplicis fractionis habet formam, cujus denominator est $(M - Cos.\, z)^{\frac{3}{2}}$, & quæ resolvi potest in seriem $A + B.\, Cos.\, z + C.\, \overline{Cos.\, z}^{2} + D.\, \overline{Cos.\, z}^{3}$ &c. Quod si de Saturno agatur, fiet $M = \frac{53}{45}$ circiter, adeoque lente admodum converget series, quamvis aliquo modo seriem convergere necesse sit. Eulerus in dissertatione de inæqualitatibus Jovis, & Saturni, quæ anno 1748 a Parisiensi Academia præmium retulit, *art.* 3. *num.* 26., ope Trigonometricorum theorematum pro diver-

sis

ſis poteſtatibus *Cos.* z ſubſtituendo coſinus angulorum multiplorum ſeriem illam ad hanc aliam redegit $A + B.Cos.\,z + C.Cos.\,2z + D.Cos.\,3z$. &c. tum *num.* 31. animadvertit poſteriorem ſeriem integratione habita citiſſime convergere. Quo jam quæſtio omnis eo deducta ab Eulero fuit, ut conſtantes coefficientes A, B, C &c. invenirentur. Ad id vero etiam præſtandum *num.* 26. oſtendit coefficientes omnes C, D &c. certa lege ſe invicem excipere, atque ex duobus primis A, & B pendere: deinde *num.* 29. pro inveniendis ipſis coefficientibus A, & B peculiarem methodum exhibuit, ex iis ſeriebus derivatam, quæ pro angulo recto multifariam dividendo tradi ſolent. Denique numeris ſuo loco ſingulis ſubſtitutis Arithmeticas ſeries ſatis convergentes exhibuit. Ex. gr. ſeries, quæ diſtantiam Saturni a Sole definit tempore conjunctionis Jovis, & Saturni eſt $1 + 0.0008542 + 0.0001449 + 0.0000335 + 0.0000105$, in qua binæ fractiones poſteriores decreſcunt fere in ratione $3:1$, binæ vero aliæ in ratione $6:1$. Vide *num.* 38. Ingenioſiſſimus Alembertius *lib.* 2. diſquiſitionum ſuarum de Mundi ſyſtemate *cap.* 3. *num.* 225. & *ſequ.* ex binomiorum formulis aliam methodum eruit pro iiſdem coefficientibus determinandis, in qua illud commodi, & elegantiæ eſt, quod C, D, & reliqui coefficientes omnes ſeriei, in quam $(M - Cos.\,z)^{-\frac{3}{2}}$, aut $(M - Cos.\,z)^{-\frac{5}{2}}$ reſolvi poteſt, ex duobus primis A, & B pendeant, & primus A exprimatur ſerie, quæ poſt quinque, aut ſex terminos in progreſſionem Geometricam recidit, B vero ſerie alia exprimatur, quæ ſimiliter deſinit in progreſſionem Geometricam poſt ſeptem, aut octo priores terminos.

Ego vero cum primam illam lente adeo convergentem ſeriem conſiderarem, animadverti quod ſi non vires ipſæ perturbatrices inquirerentur, ſed aut vires dumtaxat mediæ, aut ſumma virium omnium, quæ ſingulis revolutionibus reſpondet; illud ſtatim commodi occurreret, quod negligi deberent potentiæ omnes ſinuum, & coſinuum exponentis cujuſcumque imparis, utpote quæ, cum contrariis ſignis afficiantur, integra revolutione compenſant ſeſe invicem, ac deſtruunt.

ſtruunt. Hoc ipſo prima eadem ſeries, paribus terminis omiſſis, in hanc aliam degenerabit $A+C.\overline{Cos.z}^2+E.\overline{Cos.z}^4$ &c., quæ poſito æquali terminorum numero jam multo citius converget. Deinde ſi a ſimpliciſſima orbitarum concentricarum, & circularium hypotheſi exordium ſumendum ſit, & qua ratione Newtonus vim mediam, quæ in Lunam agit, determinavit, ſupputandæ ſint vires mediæ earum omnium virium, quæ circulares, & concentricas Primariorum Planetarum orbitas perturbant, colligendo ſcilicet vires omnes, & ſummam per circularis orbitæ peripheriam dividendo; aliud inſuper commodum habebitur, quod cum quantitates plures a ſe invicem ſint ſubducendæ, citius etiam converget ſeries, quæ exprimet vires medias, & quæ conſtantibus quantitatibus, diverſiſque radii poteſtatibus definietur. Ita vis media Jovis, quæ ex actione Saturni orietur, exprimetur ſerie 3.6982249 − 0.0000918 − 0.0000309 − 0.0000096, in qua tres poſteriores termini, qui deſignant Saturni vim, præ primo ſatis ſunt parvi, & decreſcunt fere in ratione 3:1. Ita igitur ſeries habebuntur, quæ non minore convergent celeritate, quam ſeries aliæ a Cl. Eulero exhibitæ, & prior illa problematis difficultas, quæ ex finita proportione diſtantiarum Planetæ attracti, attrahentiſque a Sole oritur, facile ſublata erit.

Minus etiam negotii faceſſet difficultas altera, quam caſus alterius eſſe diximus, in quo Planeta attrahens non jam ſuperior, ſed inferior ſit quam qui attrahitur. Quemadmodum enim dum Planeta attrahens ſuperior eſt, ſeries, quæ vires perturbatrices exprimunt ſic comparantur, ut Planetæ attrahentis diſtantia a Sole terminorum ſingulorum denominatores afficiat, & diſtantia Planetæ attracti numeratores; ita dum Planeta attrahens eſt inferior, convertendæ ſunt ſeries, & in numeratores diſtantia Planetæ attracti rejicienda eſt. Hoc ipſo ſeries non minus convergentes habebuntur. Ex. gr. media vis centripeta Jovis orta ex actione Solis, & Saturni exprimetur hac alia ſerie 1.108033 + 0.001232 + 0.000276 + 0.000077, in qua ſecundus terminus ad tertium ſe-

fere se habebit ut $5:1$, & tertius ad quartum ut $4:1$. Quod si non circulares, & concentricæ, sed ellipticæ Planetarum orbitæ intelligantur, in quarum foco alterutro sit Sol, longior quidem evadet calculus, calculi tamen ratio, & methodus erit eadem. Calculus etiam ad breviorem, simplicioremque formam revocabitur, si abscissæ non in ellipsi, sed in circulo accipiantur, & ellipsis ad circulum referatur, negliganturque altiores omnes excentricitatis potestates: quod confidentius præstare licet, quoniam in Jove, & Saturno, in quibus perturbationes motus majores sunt, excentricitates orbitarum non nisi $\frac{1}{38}$, & $\frac{1}{18}$ constituunt distantiæ mediæ Saturni a Sole, & vires ipsæ perturbatrices sunt circiter $\frac{1}{4 \cdot 1082}$, & $\frac{1}{1108}$ gravitatis absolutæ in Solem. Ita eruentur vires perturbatrices in interiorem, exterioremque ellipticam orbitam exercitæ, & sola formularum contemplatione manifestum fiet quo ex loco Planetæ attrahentis, & quo cum Apsidibus aspectu vis centripeta Planetæ attracti augeatur, aut imminuatur, & motus secundum tangentem orbitæ conceptus acceleretur, aut retardetur.

At si ipse etiam Planeta attrahens circa Solem moveri intelligatur, orietur gravior problematis difficultas. Newtonus in *Prop.* 30., 31., & 32. *lib.* 3. *Princip.* cum quæreret motum medium nodorum Lunæ, in primis dato nodorum, Solisque aspectu determinavit motum medium nodorum singulis Lunæ revolutionibus: deinde aliis, aliisque aspectibus sese excipientibus, accepto medio mediorum omnium, determinavit medium nodorum motum pro loco quolibet nodorum eorumdem respectu Solis. Quod præstitum recte est: etenim ob lentissimum Solis motum, Luna a syzigiis digressa, post integram revolutionem ne uno quidem signo a priore loco distitum invenit Solem ipsum. Planetarum quorumdam casus fere idem est. Integra enim Terræ revolutione Jupiter unum dumtaxat signum absolvit, & Planetæ alii inferiores tanta angulari celeritate moventur circa Solem, ut præ ipsis Jupiter veluti in singulis orbitæ suæ punctis quiescens

ſcens ſpectari poſſit. Idcirco Hallejus cum Apheliorum motus obſervationibus Aſtronomicis minus accurate determinari animadverteret, motum Apheliorum Terræ, Veneris, & Mercurii regula illa definire maluit, quam Newtonus ſuppeditavit in ſcholio *prop.* 14. *lib.* 3., & qua idem caſus ſtatuitur Lunæ reſpectu Solis, ac trium Planetarum inferiorum reſpectu Jovis. Igitur eodem modo data vi, aut acceleratione media, quæ ex dato Jovis loco habetur ſingulis Planetarum inferiorum revolutionibus, determinari poterit quæ ſit mediarum omnium virium vis media, quæ ex omnibus Jovis locis exercetur, ſeu quæ datæ orbitarum, & Apſidum poſitioni pro aſpectu quocumque Jovis vis proprie media reſpondeat. In aliis autem Planetis cum alia obtineat proportio velocitatum diſpar etiam caſus eſt. Et quidem Jupiter dimidiam revolutionem complet dum in orbita ſua Saturnus 72° circiter abſolvit. Deinde quæ inferiorum Planetarum major celeritas angularis inveſtigationem virium perturbatricium, quæ ex ſuperioribus Planetis proficiſcuntur, faciliorem reddit, eadem inveſtigationem virium, quibus ab inferioribus Planetis perturbantur ſuperiores, reddit implicatiſſimam.

Neque inde difficultatis effugium aliquod erui poteſt, quod continuato motu, & aſpectibus omnibus duorum Planetarum ſeſe excipientibus, unumquodque punctum unius orbitæ cum punctis ſingulis orbitæ alterius combinari debeat, adeoque ſumma omnium virium habeatur colligendo vires omnes, quæ ex unoquoque puncto unius orbitæ in alterius puncta omnia exercentur. Plura enim ſunt puncta duarum orbitarum, quæ nunquam ſimul combinantur, plures duorum Planetarum aſpectus ſunt impoſſibiles. Digrediantur eodem tempore Terra, & Mercurius ex dato loco. Quoniam Mercurius quatuor circiter revolutiones peragit dum Terra unam abſolvit, poſt unam revolutionem reverſus ad idem punctum Terram a priore loco 90°, & poſt duas, ac tres 180°, ac 270° diſſitam inveniet, poſt quatuor autem redibunt aſpectus omnes, qui erant antea. Itaque quatuor dumtaxat orbitæ terreſtris puncta erunt, quæ cum dato orbitæ Mercurii puncto combinentur. Eodem modo intelligetur 2, 12,

ro esse puncta orbitarum Martis, Jovis, & Saturni, quæ combinentur cum dato aliquo puncto terrestris orbitæ. Generatim sint m, & n periodica tempora Planetæ superioris, inferiorisque, atque ambobus simul digredientibus ex datis locis requiratur post quem numerum x revolutionum Planeta inferior superiorem Planetam peractis revolutionibus numero y dato arcu a priore loco dissitum inveniet. Sit $\frac{m}{c}$ tempus, quo superior Planeta absolvere potest arcum ipsum. Erit $nx = my + \frac{m}{c}$, sive $x = \frac{mcy+m}{nc}$. Sunt vero x, & y numeri integri. Itaque etiam $\frac{mcy+m}{nc}$ numerum integrum esse oportebit: quod sæpius est impossibile. Ex. gr. sit $m = 12$, $n = 1$, $c = 24$. Erit $x = 12y + \frac{1}{24}$, qui semper numerus fractus est, quicumque numerus integer sit y.

At vero in primis difficultas omnis minime officit, quominus perturbationes Terræ, Veneris, & Mercurii, quæ ex Jove oriuntur, pari tractentur facilitate, quam quæ ex Sole oriuntur Lunæ perturbationes. Nam quoniam Terra a conjunctione Jovis digressa post singulas revolutiones paulo majore spatio Jovem a priore aspectu dissitum invenit, quam Luna Solem inveniat, vis media in Terram a Jove exercita satis proxime supputabitur colligendo vires medias omnes, quæ ex quolibet Jovialis orbitæ puncto in puncta omnia terrestris orbitæ exercentur, & medium rursus ex omnibus accipiendo. Hoc ipso aliquis erit factus in cælesti Physica progressus si Lunæ, & Planetarum inferiorum aberrationes una, eademque methodo complectantur. Deinde ad Planetas alios quod pertinet, manifestum est, vires Saturni in Jovem maximas esse in conjunctione, in oppositione minimas, in octantibus conjunctionis majores quam in octantibus oppositionis, & ita porro. Ita igitur quo plura puncta, & aspectus combinentur inter se, eo etiam arctiores habebuntur virium mediarum limites. Rursus mediarum virium limitem aliquem exhibent vires, quas Saturnus exerceret si semper in Aphelio

lio suæ orbitæ, aut semper in Perihelio reperiretur: limitem alium vires, quæ ex octantibus Aphelii, aut Perihelii exercerentur: & alium pariter vires, quæ punctis aliis analogis responderent. Quare approximationis alicujus gratia primo animum subiit simul colligere vires omnes, quæ ex datis aliquot punctis circa oppositionem, conjunctionemque, Aphelium, & Perihelium ab uno in alium Planetam superiorem, aut inferiorem semper exercerentur, & summam ipsam dividere per numerum punctorum. Animadverti autem approximationem evadere accuratiorem supputando vires punctorum omnium, ac temporum, & summam aut per orbitæ perimetrum, aut per tempus periodicum dividendo. Et licet ob inæquabilem motum Planetarum vis media non sit medium Arithmeticum terminorum omnium ita acceptorum; medium tamen Arithmeticum, quod accipitur, a vi media non adeo dissidere necesse est, atque ita approximationem illius generis haberi, quam pro praxi Astronomica, & problematis hujus generis sufficere initio dictum est.

Hac demum ratione erutis viribus omnibus perturbatricibus Planetarum superiorum, inferiorumque detegi poterit quibus aspectibus, & quo gradu velocitas projectionis in hypothesi orbitarum circularium augeatur, vel imminuatur, & qui sint motus nodorum singulorum, inclinationisque orbitarum inter se. In hypothesi etiam orbitarum ellipticarum præsto erit quæ variationes pendeant ex vario aspectu Planetæ attrahentis, & Apogæi, atque orbitæ Planetæ attracti, & quæ pendeant ex varia positione utriusque orbitæ. In æquationibus posterioris hujus generis supputandis singillatim immorari volui, tum pro argumenti elegantia, & dignitate, tum quod vicissitudines mediorum motuum Parisiensis Scientiarum Academia anno 1760 præmio proposito postulaverit. Videbatur enim generalis gravitatis theoriæ defectum, atque exceptionem esse, quod cum actione Jovis augeri debeat gravitas Saturni in Solem, & gravitas Jovis imminui Saturni actione, coarctari etiam deberet Saturni orbita, & orbita Jovis dilatari semper, & tempus periodicum Saturni quidem imminui, Jovis autem augeri: cum potius tempus periodi-

 cum

cum Jovis corripi, & Saturni tempus diuturnius fieri observationibus Astronomicis compertum sit. Totius equidem difficultatis hujus solutio facile patet iis omnibus, qui in perscrutandis gravitatis legibus versati sunt. Nam si statuamus initio eas fuisse utriusque orbitæ dimensiones, quæ non jam gravitati absolutæ in Solem dumtaxat, sed summæ, aut differentiæ gravitatis absolutæ, & vis perturbatricis Jovis, aut Saturni respondissent; nullas jam amplius dimensionum, & periodicorum temporum vicissitudines ob vim ipsam perturbatricem utriusque Planetæ orbitæ pati poterant. Quod si primo eæ fuissent distantiæ Saturni, Jovisque a Sole, quas gravitate absoluta in Solem tueri semper potuissent Planetæ ipsi; accedente quidem vi perturbatrice, & gravitate aucta, aut imminuta propius ad Solem accedere debuissent, aut a Sole aliquantulum recedere. At vero ubi semel eas sibi comparassent distantias, quæ essent viribus totis reciproce proportionales, manente velocitate projectionis, desiissent motus omnes accessus, & recessus continui a Sole. Ita difficultate omni exsoluta, ex ipsis gravitatis legibus eruenda postmodum ratio supererat, qua periodicum tempus Jovis in dies brevius, & Saturni tempus diuturnius evaderet.

Cassinus in Monumentis Academiæ anno 1746 cum rationem aliquam physicam totius phænomeni dare vellet, in pluribus orbitarum locis Saturni, & Jovis vires supputando statuit, pro ea positione Apsidum, quæ modo est, velocitatem projectionis Jovis a Saturno augeri semper, & velocitatem Saturni a Jove imminui: quod quidem si verum esset, dilatari deberet Jovis orbita, & tempus periodicum augeri, æque ac si manente projectionis velocitate gravitas absoluta in Solem imminueretur. Eulerus in suis opusculis cum resistentiam ætheris infinite parvam esse nollet, censuit retardari ob medii resistentiam Planetas omnes, & coarctari propterea orbitas, & tempus periodicum imminui: cum potius, ut suo loco videbimus, motus Veneris, & Martis satis regulares sint, & Saturni tempus periodicum augeatur. In dissertatione vero de inæqualitatibus Jovis, & Saturni *art.* 4.

num.

num 60. Eulerus ex gravitatis legibus æquationem quamdam eduxit, quæ magis semper magisque successu temporis augeri debet, & quæ explicandis variationibus sæcularibus mediorum motuum idonea censeri posset. At ipsa æquatio vectorem Saturni radium circularibus arcubus definit, quæ expressio ab Alembertio *num.* 239. de Mundi systemate jure merito reprehensa est, & quæ minime excidisset Eulero, ubi Apogæi Jovialis motum considerasset, nec suas æquationes unica hypothesi circumscripsisset, quod Jovis orbita sit circularis. Alembertius omnium primus mutato coefficiente unius termini, qui ad definiendam orbitam adhibetur, eodem loco æquationem mediorum Saturni motuum exhibuit, quæ integris annis 97200 augeri debet, & singulis Saturni revolutionibus ad 100" etiam potest ascendere.

Ego indicatam superius methodum excolendo deprehendi quidem in orbibus circularibus Planetas tantumdem semper accelerari, ac retardari, & velocitatem mediam projectionis revolutionibus singulis eamdem retinere. At facta hypothesi orbitarum ellipticarum, & orbitis, atque Apsidibus Planetarum ad invicem positis, ut modo sunt, inveni velocitatem projectionis Jovis Saturni actione imminui, & velocitatem Saturni actione Jovis pluribus revolutionibus sibi succedentibus augeri semper oportere, & facili negotio ex data velocitatis æquatione sæcularem æquationem mediorum motuum, & periodicorum temporum derivavi. Singula Academiæ Regiæ, ut tunc erant exposita, communicavi: quæ cum intellexissem judicibus sapientissimis Alembert, Clairaut, & Camus minime displicuisse, animum subiit aggredi rursus argumentum ipsum, & ad breviorem formam, simplicioremque revocare. Cum autem modo me ab hisce studiis alia negotia abducant, & Rheni potissimum, aliorumque amnium late per agrum Bononiensem vagantium insolentia; quæ elucubrata sunt hactenus, in lucem publicam edenda esse existimavi. Dissertationem omnem duobus libris complexus sum. Primo expendentur singula, quæ respiciunt hypothesim circularium orbitarum, incrementum, & decrementum velocitatis projectilis in conjunctione, oppositione, & quadraturis, re-

regressionem nodorum, variationemque inclinationis orbitarum tam inter se, quam ad planum Eclipticæ, & inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem. Secundo libro absolventur cætera, quæ ad hypothesim orbitarum ellipticarum, & sæculares potissimum æquationes motuum mediorum pertinent. Licet enim Planetarum orbitæ nec circulares sint, nec ellipticæ, ad ellipsim tamen, & circulum proxime accedunt, & sublatis viribus perturbatricibus, quæ præ gravitate tota in Solem adeo exiguæ sunt, Planetæ ellipses suas parum excentricas, & circulis finitimas describerent. Præstat autem datis viribus perturbatricibus æquationes ellipticorum motuum inquirere, quam ex omnibus simul viribus analyticam orbitarum æquationem inquirendo se in calculos inextricabiles committere.

DE

DE INÆQUALITATIBUS PLANETARUM IN ORBITIS CIRCULARIBUS LIBER PRIMUS.

DE
INÆQUALITATIBUS
IN ORBITIS CIRCULARIBUS
CAPUT PRIMUM.
De viribus mediis Planetarum in orbitis circularibus.
LEMMA PRIMUM.

QUantitates materiæ in Sole, Terra, Jove, & Saturno ſunt inter ſe ut $1, \frac{1}{169282}, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}$, ſive ut 10000, 0.06, 9.37, 3.31, juxta Newtonum in *Propoſ.* 8. *Lib.* 3. Principiorum editionis Londinenſis anni 1726. Newtonus vero ſemidiametrum orbitæ quarti Jovis Satellitis e Sole viſæ ſtatuit 8' 16", quam Caſſinus in elementis Aſtronomiæ 8' 45" eſſe voluit. Hac correctione adhibita Boſcovichius in diſſertatione de inæqualitatibus Jovis, & Saturni *num.* 169, aliiſque calculi elementis ex Caſſino ipſo depromptis maſſas Jovis, & Saturni ſtatuit 11. 121, 3. 029. Newtonus in editione Amſtelodamenſi anni 1714 ſtatuit maſſas ipſas 9. 68, 4. 15, & Graveſandius in poſtrema editione 9. 305, 3. 25. Aliis etiam elementis ex Caillio depromptis evaderet Terræ maſſa 0. 05, & ita porro.

LEMMA SECUNDUM.

Sit convertenda in feriem fractio $\frac{1}{(P+PQ)^{\frac{m}{n}}}$. Scribatur pro fractione ipfa $(P+PQ)^{-\frac{m}{n}}$. Tum juxta Newtonianum binomii theorema evadet fractio $= P^{-\frac{m}{n}} - \frac{m}{n} P^{-\frac{m}{n}} Q$ $- \frac{m}{n} . \frac{-m-n}{2n} P^{-\frac{m}{n}} Q^2 -$ &c $= \frac{1}{P^{\frac{m}{n}}} - \frac{\frac{m}{n} Q}{P^{\frac{m}{n}}} + \frac{\frac{m}{n} . \frac{m+n}{2n} Q^2}{P^{\frac{m}{n}}}$ $\frac{- \frac{m}{n} . \frac{m+n}{2n} + \frac{m+2n}{3n}}{P^{\frac{m}{n}}} Q^3 +$ &c. Scilicet eadem feries habebitur, in quam quantitas $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ refolvi folet, mutatis dumtaxat fignis terminorum numero imparium, ac quantitate n pofitive femper accepta, rejectaque in denominatores fractionum fingularum $P^{\frac{m}{n}}$.

LEMMA TERTIUM.

Si in circulo $BRbr$, *fig.* 1, fiat $TM=b$, $TN=x$, $MN=y$, $MB=z$, erit $S x^{2m} dz = \frac{2m-1}{2m} . b^2 S x^{2m-2} dz - \frac{byx^{2m-1}}{2m}$, & fi fiat $y=0$, erit $S x^{2m} dz = \frac{2m-1}{2m} . b^2 S x^{2m-2} dz$. Quare fi radius ad peripheriam fe habeat ut $1 : \Delta$, habebitur $S x^2 dz = \frac{1}{2} b^3 \Delta$, $S x^4 dz = \frac{3}{8} b^5 \Delta$, $S x^6 dz = \frac{5}{16} b^7 \Delta$, $S x^8$

dz

$dz = \frac{35}{128} b^9 \Delta$, &c. Quod si summa omnium x^2, x^4, x^6 &c. per circularem peripheriam dividatur, prodibit valor medius quantitatum earumdem, scilicet $\frac{1}{2} b^2$, $\frac{3}{8} b^4$, $\frac{5}{16} b^6$ &c. Erit etiam valor medius quantitatis $x^2 y^2 = \frac{1}{2} b^4 - \frac{3}{8} b^4 = \frac{1}{8} b^4$, & valor medius quantitatis $x^4 y^2 = \frac{3}{8} b^6 - \frac{5}{16} b^6 = \frac{1}{16} b^6$, quantitatum $x^6 y^2$, aut $x^2 y^6$ erit $\frac{5}{128} b^8$, & $\frac{3}{128} b^8$ quantitatis $x^4 y^4$.

PROBLEMA PRIMUM.

Si Planeta *M*, *fig.* 2, & 3, moveatur in circulari orbita *BMb* circa majorem Planetam *T*; & Planeta alius statuatur in loco *A*, nec distantia unius præ alterius distantia a centro infinita censeri possit; invenire vim mediam, quæ juxta radii directionem Planetæ motum perturbat.

RESOLUTIO.

Si massæ trium Planetarum vocentur *A*, *M*, *T*, erunt vires acceleratrices, quibus priores duo tendent versus se invicem $\frac{A+M}{AM^2}$: vires, quibus versus se tendent primus, & tertius $\frac{A+T}{AT^2}$: vires, quibus se se versus tendent secundus, & tertius $\frac{M+T}{MT^2}$. Porro $\frac{T}{AT^2}$, & $\frac{T}{MT^2}$ exprimen vires centripetas, quibus duo Planetæ circa centrum circulares orbitas describerent. Deinde $\frac{M}{AM^2}$, $\frac{M}{MT^2}$, exprimen vires, quibus circularis motus Planetæ *A* perturbabitur. Denique $\frac{A}{AM^2}$, & $\frac{A}{AT^2}$ exprimen vires quibus secundum *AM*, & *AT* pertur-

babitur motus Planetæ M, & erit $\frac{A.AT}{AM^3} - \frac{A}{AT^2}$ differentia virium, quæ ſecundum directionem eamdem AT motum ipſum perturbabunt. Quare ſi maſſa Planetæ A unitate exprimatur, & ex A in MT demittatur perpendiculum AO, ob $TM : TN = TA : TO$, erit vis qua imminuetur gravitas Planetæ in centrum $= \frac{AT.TO}{AT.AM^3} - \frac{TO}{TA^3} = \frac{AT.TN}{MT.AM^3} - \frac{TN}{MT.AT^2}$, & ſi diſtantia AT vocetur a, & ſpecies aliæ accipiantur quemadmodum in tertio lemmate, erit ipſum gravitatis decrementum $= \frac{\pm ax}{b\left(\overline{a \mp x}^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mp x}{b \cdot a^2} = \frac{\pm ax}{b\left(a^2 + b^2 \mp 2ax\right)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{x}{ba^2}$, & vis qua gravitas augebitur erit $= \frac{b}{\left(a^2 + b^2 \mp 2ax\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Casus Primus.

Statuatur primo ſuperior Planeta A, & reſolvantur expreſſiones ſingulæ in ſeries, quarum denominator ſit aliqua diſtantiæ AT poteſtas, numerator vero aliquod factum ex quantitatibus b, & x: quæ ſeries, ob $a > b$, convergent aliquo modo, & perturbatricium virium rationem vero proximam exhibere poterunt. Supputandi ex. gr. ſint termini, in quibus quantitates b, & x quomodocumque inter ſe ductæ quintam dimenſionem non ſuperant, & in formula ſecundi lemmatis fiat $m = 3$, $n = 2$,

$$\frac{1}{P^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^3}$$

$$Q = \frac{\mp 2ax + b^2}{a^2}$$

$$\frac{-\frac{m}{n} Q}{P^{\frac{m}{n}}} = -\frac{3}{2} \frac{\left(\mp 2ax + b^2\right)}{a^5} = \pm \frac{3x}{a^4} - \frac{3b^2}{2a^5}$$

+ m

$$\frac{+\frac{m}{n}\cdot\frac{m+n}{2n}Q^2}{P^{\frac{m}{n}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\frac{\left(\mp 2ax+b^2\right)^2}{a^7}=\frac{15x^2}{2a^5}\mp\frac{15b^2x}{2a^6}+\frac{15b^4}{8a^7}$$

$$\frac{-\frac{m}{n}\ldots\frac{m+2n}{3n}Q^3}{P^{\frac{m}{n}}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\frac{\left(\mp 8a^3x^3+12a^2b^2x^2\mp 6ab^4x\right)}{a^9}=\pm\frac{35x^3}{2a^6}-\frac{105b^2x^2}{4a^7}\pm\frac{105b^4x}{8a^8}$$

$$\frac{+\frac{m}{n}\ldots\ldots\frac{m+3n}{4n}Q^4}{P^{\frac{m}{n}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}\frac{\left(16a^4x^4\mp 32a^3b^2x^3\right)}{a^{11}}=\frac{315x^4}{8a^7}\mp\frac{315b^2x}{4a^8}$$

$$\frac{-\frac{m}{n}\ldots\ldots\frac{m+4n}{5n}Q^5}{P^{\frac{m}{n}}}=\pm\frac{693x^5}{8a^8}$$

Neglectis igitur terminis, qui ambiguo ſigno hinc inde deſtruuntur erit vis, quæ gravitati detrahetur $=\frac{3x^2}{ba^3}-\frac{15bx^2}{2a^5}+\frac{35x^4}{2ba^5}+\frac{105b^3x^2}{8a^7}-\frac{315bx^4}{4a^7}+\frac{693x^6}{8ba^7}$, & vis, quæ addetur gravitati, erit $=\frac{b}{a^3}-\frac{3b^3}{2a^5}+\frac{15bx^2}{2a^5}+\frac{15b^5}{8a^7}-\frac{105b^3x^2}{4a^7}+\frac{315bx^4}{8a^7}$. Quod ſi igitur ſumma omnium virium juxta lemma tertium accipiatur, dividaturque per circularem peripheriam, erit vis media gravitati in centrum detracta $=\frac{3b}{2a^3}-\frac{15b^3}{4a^5}+\frac{105b^3}{16a^5}+\frac{105b^5}{16a^7}-\frac{945b^5}{32a^7}+\frac{3465b^5}{128a^7}=\frac{3b}{2a^3}+\frac{45b^3}{16a^5}+\frac{525b^5}{128a^7}$: & vis media gravitati addita erit $=\frac{b}{a^3}-\frac{3b^3}{2a^5}+\frac{15b^3}{4a^5}+\frac{15b^5}{8a^7}-\frac{105b^5}{84a^7}+\frac{945b^5}{64a^7}=\frac{b}{a^3}+\frac{9b^3}{4a^5}+\frac{225b^5}{64a^7}$, & differentiam duarum virium accipiendo erit medium gravitatis decrementum $=\frac{b}{2a^3}\left(1+\frac{9b^2}{8a^2}+\frac{75b^4}{64a^4}\right)$. Quod erat primum.

Co-

COROLLARIUM PRIMUM.

Si mediæ diſtantiæ Jovis, & Saturni a Sole ſint 52, 95, & quantitates materiæ in Sole, & Saturno ſtatuantur 10000, & 3.029 juxta lemma primum, erit gravitas media Jovis in Solem $= \frac{10000}{52^2} = \frac{10000}{2704} = 3.6982249$, & medium gravitatis decrementum, quod ex actione Saturni oritur $= \frac{78.754}{857375} \left(1 + \frac{24336}{72200} + \frac{5483712}{52128336}\right) = 0.0000918 + 0.0000309 + 0.0000096 = 0.0001023$.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Pariter cum media gravitas Martis in Solem ſit $= \frac{10000}{15^2} = 40$, erit medium gravitatis decrementum ex Jovis actione ortum $= \frac{166.815}{281216} \left(1 + \frac{2025}{21632} + \frac{3796875}{467943424}\right) = 0.0005932 + 0.0000555 + 0.0000048 = 0.0006535$, poſita ſcilicet Jovis maſſa $= 11.121$. Actio media Saturni in Martem erit quam proxime $= 0.0000272$.

COROLLARIUM TERTIUM.

Denique cum Terræ, Veneris, & Mercurii in Solem gravitas ſit circiter 100, 204, 1111, erit actio media Jovis in Terram $= 0.000412$, in Venerem $= 0.000282$, in Mercurium $= 0.000118$. Actio media Terræ in Venerem erit circiter $= 0.00031$, ſcilicet paulo major actione Jovis.

CASUS SECUNDUS.

Quod ſi Planeta attrahens ſit inferior, & ſit $a < b$, reſolvatur utraque expreſſio perturbatricium virium in ſeries, qua-

quarum denominatores ſint aliquæ potentiæ radii b, numeratores vero ſint facta ex quantitatibus a, & x, fiat ſcilicet in lemmate ſecundo $P = b^2$, $Q = \mp \frac{2ax + a^2}{b^2}$. Hoc poſito manifeſtum eſt in denominatoribus ſingulis ſerierum pro primo caſu erutarum quantitatem b^3 quantitati a^3 ſubſtitui oportere, in numeratoribus vero ponendum eſſe $\mp \frac{2ax}{b^2}$ loco $\mp \frac{2ax}{a^2}$, & $\frac{a^2}{b^2}$ loco $\frac{b^2}{a^2}$, ut prodeant ſeries aliæ, quæ vires Planetæ attrahentis, & centro propioris exprimant. Quare ſi pariter ii ſoli termini ſupputandi ſint, in quibus Planetæ ipſius diſtantia a centro quintam dimenſionem non ſuperat, prodibit $\frac{1}{(a^2 + b^2 \mp 2ax)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^3} \pm \frac{3ax}{b^5} - \frac{3a^2}{2b^5} + \frac{15a^2x^2}{2b^7} \mp \frac{15a^3x}{2b^7} \pm \frac{35a^3x^3}{2b^9} + \frac{15a^4}{8b^7} - \frac{105a^4x^2}{4b^9} + \frac{315a^4x^4}{8b^{11}} \pm \frac{105a^5x}{4b^9} \mp \frac{315a^5x^3}{4b^{11}} \pm \frac{693a^5x^5}{8b^{13}}$: & erit vis gravitati addita $= \frac{1}{b^2} - \frac{3a^2}{2b^4} + \frac{15a^2x^2}{2b^6} + \frac{15a^4}{8b^6} - \frac{105a^4x^2}{4b^8} + \frac{315a^4x^4}{8b^{10}}$, & vis media $= \frac{1}{b^2} + \frac{9a^2}{4b^4} + \frac{225a^4}{64b^6}$. Pariter negligendo terminos, qui ambiguo ſigno ſe deſtruunt, erit vis detracta gravitati $= \frac{3a^2x^2}{b^6} - \frac{15a^4x^2}{2b^8} + \frac{35a^4x^4}{2b^{10}}$, & vis media $= \frac{3a^2}{2b^4} + \frac{45a^4}{16b^6}$. Quare differentiam virium accipiendo fiet medium gravitatis incrementum $= \frac{1}{b^2}\left(1 + \frac{3a^2}{4b^2} + \frac{45a^4}{64b^4}\right)$. Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

Factis iiſdem ſubſtitutionibus, quæ ſupra, erit gravitas media Saturni in Solem $= 1 . 108033$, & medium gravitatis incrementum ex Jove ortum erit =

$\frac{11 . 121}{9025}\left(1 + \frac{8112}{36100} + \frac{32902272}{521283360}\right) = 0.001232 + 0.000276 + 0.000077 = 0.001585$. Erit pariter actio media Terræ in Martem $= 0.000383$.

SCHOLION.

Si Planetarum orbitæ circulis valde affines, & circa centrum virium mobiles conciperentur, eademque Newtoni metodo, ex datis viribus perturbatricibus, quæ vim centripetam minuunt, vel augent, motus Apsidum quæreretur; prodiret primo Planetarum omnium Aphelia moveri in consequentia. Etenim juxta exemplum tertium *Prop.* 45. *Lib.* 1. *Princip. Mathem.* si m, & n assumantur pro quibuscumque indicibus dignitatum radii vectoris b, assumanturque B, & C pro numeris quibuscumque datis, & vis omnis centripeta statuatur $= \frac{B . b^m + C . b^n}{b^3}$, erit pro singulis Planetæ revolutionibus motus Apsidum $= 360° \left(1 - \sqrt{\left(\frac{mB + nC}{B + C}\right)}\right)$. Unde si Planeta attrahente superius posito, statutaque ipsius massa ad massam Solis ut $1 : M$, sit inferioris gravitas $= \frac{M}{b^2} - \frac{b}{2a^3}\left(1 + \frac{9b^2}{8a^2} + \frac{75b^4}{64a^4}\right)$, in primis quantitas C negativa erit, deinde fiet $m = 1$, & se consequentes valores quantitatis n erunt 4, 6, 8, adeoque $\sqrt{\left(\frac{mB + nC}{B + C}\right)}$ semper minor erit unitate, & motus Apsidum erit progressivus. Quod si vero Planeta attrahens inferius collocetur, & vis centripeta evadat $= \frac{M}{b^2} + \frac{1}{b^2}\left(1 + \frac{3a^2}{4b^2} + \frac{45a^4}{64b^4}\right)$, primo cum vis $\frac{1}{b^2}$ gravitati toti addatur, sequaturque eamdem legem, motum Apsidum minime afficiet. Vires autem aliæ similiter cum gravitati superaddantur, adeoque C positiva sit, & n evadet -1, -3, rursus minor erit unitate quantitas $\sqrt{\left(\frac{mB + nC}{B + C}\right)}$, & Apsides

in

in directum moveri pergent. Hypothesi eidem orbitæ mobilis pressius inhærendo etiam quantitas totius motus erueretur. Ita motus Apsidum Saturni actione Jovis fieret singulis revolutionibus $= 360^\circ . \left(1 - \sqrt{\left(\frac{1108033 + 1232 - 276 - 231}{1108033 + 1585} \right)} \right)$ $= 502''$, & annis singulis evaderet $17''$ circiter: cujus quidem progressus Apsidum cum $11''$ vi $\frac{3a^2}{4b^4}$, $6''$ vero vi $\frac{45a^4}{64b^6}$ adscribi debeant, si intelligamus alios seriei terminos decrescere eadem proportione, statui poterit ex vi Jovis motus annuus Aphelii Saturni $21''$, aut $22''$, spectatisque etiam viribus quatuor Jovis Satellitum ille eruetur progressus Apsidum, qui cum observationibus Astronomicis consentiet, juxta quas $27''$ circiter statui deberet. At vero ipse etiam Newtonus animadvertit juxta hypothesim orbitæ mobilis motum Lunarium Apsidum duplo fere minorem erui quam vere est, adeoque supputandis Apsidum motibus hypothesim eamdem esse imparem. Walmeslejus in *Coroll.* 1. *par.* 2. Opusculi de motu Apsidum demonstravit orbitæ mobilis hypothesi veros Apsidum motus exhiberi quando vis centripeta exprimitur potentia aliqua distantiæ a centro, non vero quando aut summa, aut differentia est plurium virium. Motum Apsidum Lunæ observationibus apprime consonum ingeniosissime supputarunt Clairautius, Alembertius, Simpsonius, & Walmeslejus. Ego cum generali ratione aliqua motum Apsidum Planetarum omnium supputare vellem, cæpi primo methodum illam excolere, quam *Prop.* 11., & 12. de inæqualitatibus motuum Lunarium exposuit Walmeslejus, utpote quæ brevissima omnium visa est quæ a Luna ad Planetas alios traduceretur. Illa enim methodo nihil aliud assumitur nisi quod vis centripeta, & centrifuga, & vires aliæ perturbatrices in orbitis Planetarum quam proxime eædem sint, quæ in orbitis circularibus haberentur: tum datis viribus inquiritur velocitas, qua centro propius accedere debet Planeta, atque ex data velocitate eruitur tempus quo a maxima ad minimam distantiam a centro pervenit. Quem calculum recte etiam procedere intelligebam licet eæ tantum vires consi-

derentur, quæ juxta directionem radii vectoris agunt, & quibus gravitas in centrum augetur, vel imminuitur, omissis viribus aliis, quibus motus projectionis juxta tangentem orbitæ conceptus acceleratur, aut retardatur. Walmeslejo hanc omissionem objecerat Simpsonius in præfatione Miscellaneorum Mathematicorum, quæ anno 1757 Londini edita sunt. Verum ex subsequenti capite manifestum fiet vires radio vectori perpendiculares integra revolutione in orbitis circularibus sese mutuo destruere, & nullas esse. Deinde ex *cap.* 2. *lib.* 2. præsto erit in orbitis ellipticis portionem illam virium perpendicularium, quæ singulis revolutionibus superest, una Apogæi revolutione compensari pariter signorum oppositione, atque evanescere: adeoque easdem vires potius æquationem motus, quam motum Apsidum afficere. Denique si dato Apogæi Lunæ, Solisque aspectu, & data vi media quæ æquabilem arearum descriptionem perturbat inquiratur æquatio accessus, recessusque a centro, minores prodibunt quantitates, quam ut inde Apogæi motus sensibiliter alteretur. Porro eadem metodo, qua Walmeslejus motum Apogæi Lunæ investigavit, ad Planetas inferiores traducta, quatenus a superioribus perturbantur, iisdemque retentis denominationibus, quæ supra, inveni quod tempus dimidiæ revolutionis esset ad tempus, quo revera Planeta inferior angulum inter Apsides describeret ut $\frac{M}{b^2} - \frac{7b}{4a^3} - \frac{81b^3}{32a^5}$ &c: $\frac{M}{b^2}$: quo dato motus annuus Aphelii Jovis, qui actione Saturni gignitur, fieret 10" circiter, & motus annuus Aphelii Martis, & Terræ, qui gignitur actione Jovis, evaderet 37", & 18", motus autem Aphelii Veneris, & Mercurii minuendus esset in ratione sesquiplicata distantiæ a Sole. Verum cum nihil hactenus invenerim, quod generatim pro Planetis omnibus satisfaceret, maxime cum de motu Apogæi Planetarum superiorum agitur, qui actione inferiorum Planetarum gignitur, idcirco malui hæc omnia obiter scholii loco, & brevissime indicare.

Ca-

CAPUT SECUNDUM.

De Planetarum velocitate in conjunctione, oppositione, & quadraturis.

PROBLEMA SECUNDUM.

Iisdem positis invenire vim totam secundum tangentem circularis orbitæ exercitam, & differentiam velocitatis in syzigiis, & quadraturis.

Resolutio.

Positis omnibus ut supra erit vis Planetæ A secundum AO parallelle tangenti circularis orbitæ BNb exercita in punctum $M = \frac{AT \,.\, AO}{AT.AM^3} - \frac{AO}{AT^3} = \frac{AT \,.\, NM}{MT.AM^3} - \frac{NM}{MT.AT^2} = \frac{ay}{b(a^2+b^2\mp 2ax)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{ba^2}$. Est autem acceleratio in elemento quovis circularis arcus $\pm\frac{bdx}{y}$ directe ut vis accelerans, & tempus: celeritas vero ipsa est ut elementum arcus directe, & tempus reciproce. Quare compositis rationibus si Planetæ attracti celeritas vocetur V, erit $VdV = \frac{\pm adx}{(a^2+b^2\mp 2ax)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{dx}{a^2}$: & si Planeta attrahens sit superior, & a censeri possit major quam b, evoluta in seriem fractione habebitur $VdV =$

$$\frac{3xdx}{a^3} \mp \frac{3b^2dx}{2a^4} \pm \frac{15x^2dx}{2a^4} - \frac{15b^2xdx}{2a^5} + \frac{35x^3dx}{2a^5} \pm \frac{15b^4dx}{8a^6} \mp \frac{105b^2x^2dx}{4a^6} \pm \frac{315x^4dx}{8a^6}$$

$$V^2 = C + \frac{3x^2}{a^3} \mp \frac{3b^2x}{a^4} \pm \frac{5x^3}{a^4} - \frac{15b^2x^2}{2a^5} + \frac{35x^4}{4a^5} \pm \frac{15b^4x}{4a^6} \mp \frac{35b^2x^3}{2a^6} \pm \frac{63x^5}{4a^6}.$$

Jam vero si sit $x = o$, scilicet in quadraturis, evanescet omnis acceleratio, & Planeta velocitatem eamdem retinebit,

 qua

qua, ſublata vi perturbatrice, circularem orbitam deſcriberet, & quam propterea per dimidium orbitæ radium cadendo ſua vi centripeta poſſet acquirere. Rurſus ſi maſſa corporis T ad maſſam Planetæ attrahentis ſe habeat ut $M:1$, erit vis centripeta $= \frac{M}{b^2}$, & lapſu per dimidium radium concepto fiet $V\,dV = \frac{M\,dx}{b^2}$, $\frac{1}{2}V^2 = \frac{M}{b^2} \cdot \frac{1}{2}b$, $V^2 = \frac{M}{b} = C$. Igitur in ſyzigiis ubi evadit $x = b$, habebitur

$$V^2 = \frac{M}{b} + \frac{3b^2}{a^3} \mp \frac{3b^3}{a^4} \pm \frac{5b^3}{a^4} - \frac{15b^4}{2a^5} + \frac{35b^4}{4a^5} \pm \frac{15b^5}{4a^6} \mp \frac{35b^5}{2a^6} \pm \frac{63b^5}{4a^6}$$

$$V^2 = \frac{M}{b} + \frac{b^2}{a^3}\left(3 \pm \frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{4a^2} \pm \frac{2b^3}{a^3}\right)$$

& velocitas in ſyzigiis ad velocitatem in quadraturis ſe habebit in ratione ſubduplicata quantitatis

$1 + \frac{b^3}{M.a^3}\left(3 \pm \frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{4a^2} \pm \frac{2b^3}{a^3}\right)$ ad unitatem. Quod erat primum.

Corollarium Primum.

In conjunctione duorum Planetarum, quando x poſitive accipitur, ſuperiora ſeriei ſigna accipienda erunt, inferiora vero pro oppoſitione, quando x accipitur negative. Et quia differentia velocitatum exigua eſt, ſumptis approximationum ope radicibus, erit velocitas in quadraturis ad velocitatis differentiam in conjunctione in ſimplici ratione $1 : \frac{b^3}{2M.a^3}\left(3 + \frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{4a^2} + \frac{2b^3}{a^3}\right)$, in oppoſitione vero $1 : \frac{b^3}{2M.a^3}\left(3 - \frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{4a^2} - \frac{2b^3}{a^3}\right)$. Unde ſi Planetæ attracti motus ad ipſum centrale corpus referatur, in ſyzigiis ſemper accelerabitur, & in conjunctione magis quam in oppoſitione, & velocitas in quadraturis ad differentiam velocitatum in conjunctione, & oppoſitione ſe habebit ut $1 : \frac{b^3}{M.a^3}\left(\frac{2b}{a} + \frac{2b^3}{a^3}\right)$.

Co-

COROLLARIUM SECUNDUM.

Numeris in locum ſpecierum ſubſtitutis erit velocitas Jovis in quadraturis ad differentiam velocitatis in conjunctionibus Saturni ut $1 : \frac{21 \cdot 29}{857375} \left(3 + \frac{104}{95} + \frac{4056}{3610} + \frac{281206}{857375} \right)$, ſive quam proxime ut $857375 : 128 = 6698 : 1$. In oppoſitione velocitatis differentia fere dimidio erit minor. Martis velocitas in quadraturis ad differentiam in conjunctione Jovis ſe habebit ut $1 : \frac{1 \cdot 88}{140608} \left(3 + \frac{30}{52} + \frac{3375}{10816} \right) = 140608 : 7 = 20087 : 1$. Pariter ſpectata tantum actione Jovis eruetur velocitatem Terræ in quadraturis ad incrementum velocitatis in conjunctione ſe habere ut $70304 : 1$.

COROLLARIUM TERTIUM.

Si Planetæ attrahentis diſtantia præ radio orbitæ Planetæ attracti infinita cenſeri poſſit, negligi etiam poterunt quadraticæ omnes, & pluſquam quadraticæ radii ipſius poteſtates. Quod ſi inſuper gravitas corporis M in T ſe habeat ad attractionem ſecundum TM exercitam ut $1 : \mathfrak{Q}$, erit velocitas in quadraturis ad velocitatem in ſyzigiis ut $1 : \surd (1 + 3\mathfrak{Q}) = \surd (1 - 2\mathfrak{Q}) : \surd (1 + \mathfrak{Q})$, quam velocitatum rationem dedit Mac-Laurinus *Treatiſe of fluxions art.* 490. Pergendo autem a quadraturis ad ſyzigias velocitas augebitur in ratione duplicata ſinus diſtantiæ a quadratura ipſa, ſive in ratione ſimplici ſinus verſi diſtantiæ duplicatæ.

COROLLARIUM QUARTUM.

Quia vis ſecundum MT exercita eſt ad gravitatem corporis T in A ut $MT : AT$, & gravitas corporis T in A eſt ad gravitatem corporis M in T in ratione directa $AT : MT$, & reciproca duplicata temporum periodicorum T circa A, & M circa T, *per Coroll.* 17. *Prop.* 66. *Princip. Mathem.* New-

Newtoni, erit $1 : Q$ in ratione duplicata eorumdem temporum. Quare si tempora vocentur T, & t erit velocitas in quadraturis ad velocitatem in syzigiis ut $T : \surd\ (T^2 + 3t^2)$, quam rationem velocitatum dedit Machinius, *Laws of the Moon's motion pag.* 59.

Corollarium Quintum.

Quia tempus periodicum Lunæ circa Terram ad tempus periodicum Terræ circa Solem sese habet in ratione subduplicata 1000:178725, erit velocitas Lunæ in quadraturis ad velocitatem in syzigiis ut $1 : 1 + \frac{300}{35745} = 35745 : 36045 = 11915 : 12015$. Coincidit hæc velocitatis ratio quam proxime cum ratione 11865 : 11965, quam exhibuit Newtonus in *Propos.* 26. *Lib.* 3. *Princip.* Quare problema ipsum Newtoni non nisi peculiaris casus, ac corollarium erit problematis, quod modo generaliter solutum est.

Corollarium Sextum.

Pariter si tempora periodica Jovis circa Solem, & Satellitis extimi circa Jovem statuantur dierum 4332.514, & 16.688 erunt velocitates Satellitis in quadraturis, & syzigiis 3754135, & 3754219, & differentia velocitatum fiet $\frac{1}{37541}$. Et si periodi Saturni circa Solem, & Satellitis extimi circa Saturnum statuantur dierum 10759.275, & 79.325, erunt pariter velocitates in quadraturis, & syzigiis cum Sole 231523997, 231542 87, & fiet differentia omnis $\frac{1}{11576}$. Aliorum Jovis, & Saturni Satellitum perturbationes ex Sole ortæ longe minores erunt, quam ut observationibus Astronomicis possint detegi.

Co-

COROLLARIUM SEPTIMUM.

Generatim vero ſi ipſe etiam Planeta attrahens in orbe ſuo moveri intelligatur, tardius Planeta attractus a quadraturis ad ſyzigias perveniet, & a ſyzigiis rurſus ad quadraturas. Erit autem tempus, quo inferior Planeta angulo quocumque minimo propius accederet ſuperiori, in hypotheſi quod ſolus in orbe ſuo moveri pergat, ad tempus quo eumdem angulum deſcribit in hypotheſi quod bini ſimul circa centrum moveantur, ut motus inferioris Planetæ ad ſummam duorum motuum, & vires acceleratrices, ac celeritates totæ in eadem proportione augebuntur. Itaque differentia velocitatum augenda erit in ſimplici ratione ſummæ angularium motuum ad motum angularem Planetæ inferioris, in Jove ſcilicet in ratione $\frac{1}{12} + \frac{1}{30} : \frac{1}{12}$, ſive $21 : 15$, in Marte in ratione $7 : 6$, in Terra $13 : 12$, & in Luna denique $1080853 : 1000000$.

CASUS SECUNDUS.

Si Planeta attrahens inferior ſit, & primus æquationis terminus reſolvatur in ſeriem, cujus denominatores ſint aliquæ radii b poteſtates, patet ſecundum æquationis terminum $\mp \frac{dx}{a^2}$ minime deſtrui, atque evaneſcere. At ſi conſideremus terminum ipſum perturbationem Solis deſignare, alios fere ſemper Planetas aliquos ex adverſis Solis partibus reperiri, & eorumdem actione prohiberi ne Sol longius recedat a communi centro gravitatis totius ſyſtematis, referri poterit motus Planetæ attracti ad immobile centrum virium, ut ſit $V\,dV = \frac{\pm a\,dx}{(a^2 + b^2 + 2ax)^{\frac{3}{2}}}$. Hoc ipſo evoluta fractione juxta ſecundum caſum antecedentis Problematis habebitur

Vd

$$VdV = \pm\frac{a\,dx}{b^3} + \frac{3a^2x\,dx}{b^5} \mp \frac{3a^3dx}{2b^5} \pm \frac{15a^3x^2dx}{2b^7} - \frac{15a^4x\,dx}{2b^7} + \frac{35a^4x^3dx}{2b^9} \text{ \&c}$$

$$V^2 = \frac{M}{b} \pm \frac{2ax}{b^3} + \frac{3a^2x^2}{b^5} \mp \frac{3a^3x}{b^5} \pm \frac{5a^3x^3}{b^7} - \frac{15a^4x^2}{2b^7} + \frac{35a^4x^4}{4b^9} \text{ \&c.}$$

Quare in ſyzigiis cum ſit $x = b$ fiet

$$V^2 = \frac{M}{b} \pm \frac{2a}{b^2} + \frac{3a^2}{b^3} \pm \frac{2a^3}{b^4} + \frac{5a^4}{4b^5} \pm \frac{2a^5}{b^6}$$

adeoque velocitas in ſyzigiis ad velocitatem in quadraturis ſe habebit in ſubduplicata ratione quantitatis

$1 + \frac{a}{M.b}\left(\pm 2 + \frac{3a}{b} \pm \frac{2a^2}{b^2} + \frac{5a^3}{4b^3} \pm \frac{2a^4}{b^4}\right)$ ad unitatem. Quod erat alterum.

COROLLARIUM PRIMUM.

Quod ſi pariter accipiatur differentiæ totius dimidium, & poſitiva ſigna conjunctioni, oppoſitioni vero negativa reſpondere intelligantur, erit velocitas Planetæ in quadraturis ad differentiam velocitatis in conjunctione ut

$1 : \frac{a}{M.b}\left(1 + \frac{3a}{2b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{5a^3}{8b^3} + \frac{a^4}{b^4}\right)$, & ad velocitatis differentiam in oppoſitione ut $1 : \frac{a}{M.b}\left(-1 + \frac{3a}{2b} - \frac{a^2}{b^2} + \frac{5a^3}{8b^3} - \frac{a^4}{b^4}\right)$. Quare ſi inferior Planeta immobilis ſtatuatur, & Planetæ ſuperioris motus referatur ad immobile centrum virium, atque ita convergant ſeries ut differentia velocitatis primis dumtaxat ſerierum terminis poſſit exprimi, accelerabitur quidem in conjunctionibus Planeta ipſe ſuperior, at in oppoſitionibus retardatio aliqua habebitur. Quod etiam manifeſtum eſt. Dum enim ab r ad m fertur, *fig.* 3, perpendiculum OA ex A in Tm demiſſum jacet ad partem illi oppoſitam, ad quam tendit Planeta.

Co-

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si vero ipse etiam Planeta attrahens, & inferior in orbe suo mobilis statuatur, & tempora periodica sint in ratione radiorum sesquiplicata, Planeta superior a quadraturis ad conjunctionem tendendo antecedet Planetam inferiorem, subsequetur autem redeundo a conjunctione ad quadraturas. Vires igitur ab inferiore Planeta exercitæ in priore casu retardabunt Planetam superiorem, atque accelerabunt in casu altero. Subsequetur etiam Planeta superior inferiorem dum tendet a quadratura ad oppositionem, & perpendiculum *O A* jacebit rursus ad eamdem partem, ad quam tendet Planeta ipse, atque ita rursus accelerabitur.

COROLLARIUM TERTIUM.

Itaque si referamus Saturni motum ad immobile centrum virium totius systematis, Saturnus actione Jovis retardabitur in conjunctionibus, & in oppositionibus accelerabitur: & erit velocitas Saturni in quadraturis ad decrementum velocitatis in conjunctionibus Jovis in ratione composita $1 : \frac{578}{950000} \left(1 + \frac{156}{190} + \frac{2704}{9025} \text{ \&c} \right)$, & motus angularis Jovis ad summam motuum angularium Jovis, & Saturni, juxta *Coroll.* 1., & 2. casus hujus, & *Coroll.* 7. prioris casus: sive erit velocitas Saturni ad decrementum velocitatis in ratione composita 950000 : 1156, & 15 : 21.

SCHOLION.

Quia ob maximam Solis distantiam primus dumtaxat terminus seriei, quæ vires Lunæ perturbatrices exprimit, potest accipi, & Lunæ velocitas augetur in duplicata ratione sinus distantiæ a quadratura; juxta illud Machinii theorema, quod demonstravit Walmeslejus *par.* 3. de motu Apsidum, & *Propos.* 7. de inæqualitatibus motuum Lunarium,

area, quam Luna circa Terram describit, exhiberi poterit per aream circuli, & area, quam describeret circa Terram si nulla foret acceleratio, exhiberi poterit per aream ellipseos, cujus axis major sit ad minorem in subduplicata ratione velocitatis Lunæ in syzigiis, & quadraturis. Motus autem veri, & medii differentia fiet maxima in octantibus, & erit summa axium ellipseos ad axium differentiam ut radius ad sinum æquationis maximæ. Scilicet maxima Lunæ variatio erit in octantibus 32' 32", quæ aucta in ratione synodici temporis ad periodicum evadet 35' 10". Eadem methodo investigari posset variatio Satellitum Jovis, & Saturni, si posset evadere sensibilis. Aliorum vero Planetarum velocitas cum eamdem rationem minime sequatur, eodem modo exhiberi minime poterit. Patebit tamen accelerationis totius, ac retardationis ratio, quæ in conjunctionibus Jovis, & Saturni ab Astronomis detecta est. Quinimo si consideremus velocitatis differentiam exiguam esse, adeoque intelligamus Planetas ipsos a suis orbitis minime recedere, sed circa conjunctionem dumtaxat celeriores, aut tardiores effici exhiberi etiam poterit aliquis accelerationis, & retardationis totius calculus. Ita quia per *Coroll.* 2. casus primi velocitas Jovis in quadraturis ad incrementum velocitatis in conjunctionibus Saturni sese habet ut 6698 : 1, si fiat ut 6698 : 1 ita 90° sive 5400' ad quartum, & quartus ipse numerus per *Coroll.* 7. augeatur in ratione 21 : 15, fiet tota angularis motus, & areæ circa Solem descriptæ acceleratio 1' 10". Simili modo per Corollarium idem septimum, & *Coroll.* 3. secundi casus, Saturni retardatio in conjunctionibus Jovis eruetur circiter 10'. Martis acceleratio in conjunctionibus Jovis non nisi 18" esse poterit, & differentia diurni motus, qui fere dimidii gradus est, evadet penitus insensibilis. Quæ cum observationibus Astronomicis singula satis conveniunt. Cum enim anno 1743 Jupiter, & Saturnus in signo Virginis mense Februario conjuncti essent, Cassinus die 21 mensis, 44' post quintam matutinam horam Saturni locum statuit 2° 15' 50" ipsius signi, cum juxta tabulas Astronomicas 2° 28' 28" esse debuisset. Die autem 28 Jupiter 5' 45" matu-

tutini temporis visus est in 9° 17' 33'', cum ex tabulis debuisset esse 9° 15'. Differentiam loci visi, & ex tabulis eruti, — 12' 38'' pro Saturno, & pro Jove + 2' 33'' Cassinus ipse majorem existimavit, quam ut in errorem, atque indiligentiam tabularum tota refunderetur. Vide Monumenta anni 1743 Regiæ Parisiensis Scientiarum Academiæ. Hinc vero patet actionem mutuam duorum Planetarum potiorem sibi differentiæ totius partem vindicasse. In Commentariis etiam Bononientibus *par.* 3. *to.* 2. habemus diligentissimas Eustachii Manfredii observationes conjunctionis Heliocentricæ Martis, & Jovis, quæ die 29 Junii anno 1727 habita est. Et primo longitudines Martis ante, & post conjunctionem observationibus majores prodierunt quam ex tabulis. Ita quidem ut diebus 25 Maii, & 4, ac 5 Junii, quorum dierum observationes omnium accuratissimæ ipsi Manfredio visæ sunt, longitudo Martis 39'', 33'', 45'' major deprehensa sit quam juxta Wistoni tabulas esse oportebat. Observationum cum Cassinianis tabulis adhuc major dissensus patuit, & cum tabulis Hiræi dissensus fere idem fuit. Deinde motum diurnum Martis, qui juxta Wistoni tabulas 1° 24' 10'' duobus diebus conjunctionem antecedentibus debebat esse, & 1° 23' 52'' duobus aliis proxime subsequentibus, cum observationibus comparavit Manfredius ut dignosceret an Jovis actione Mars ante conjunctionem celerior, ac postmodum tardior evaderet. Juxta illas observationes, quas Martem primo ad Solem referendo instituit, motus duorum priorum dierum prodiit 1° 24' 14'', & 1° 22' 54'' motus duorum posteriorum. At juxta observationes alias Martis ad arcturum relati prodierunt bini motus 1° 24', & 1° 23' 34''. Differentiam nimis exiguam censuit Manfredius, quam ut attractioni Jovis tribueretur, eamdemque ex eo oriri posse animadvertit, quod quarta tantum parte unius secundi minuti temporis erratum sit in determinando vel Martis, vel arcturi transitu, sive etiam in horologio, aut murali instrumento corrigendo. Ex iis, quæ antea diximus, manifestum est differentias hasce omnes rejiciendas esse in errores exiguos tabularum vel observationum, & motum diurnum Martis nul-

lam ſenſibilem alterationem attractione Jovis ſubire poſſe. Totius vero longitudinis viſæ, atque ex tabulis erutæ differentia dimidia fere attractioni Jovis debetur, reliqua defectui alicui obſervationum, aut tabularum. Inde etiam facili ratione deduci poſſet inclinationem orbitæ Martis ad Eclipticam actione Jovis ad ſenſum non immutari, & inæqualitates eas omnes latitudinis Martis, quas Manfredius in conjunctione Jovis deprehendit, obſervationum incertitudini dumtaxat tribui oportere. Sed de variatione inclinationis uniuſcujuſque orbitæ agemus poſtmodum.

CAPUT TERTIUM.

De nodorum motu.

PROBLEMA TERTIUM.

SI plana duarum orbitarum ad se invicem inclinentur, determinare vim, qua Planeta attractus a plano suæ orbitæ distrahitur, & nodorum motum.

RESOLUTIO.

Esto $BQFb$, *fig.* 4., projectio orbitæ $BMPb$ in Planum orbitæ Planetæ A, & sit Bb linea nodorum, TA linea syzigiarum, $w:1$ ratio sinus inclinationis duarum orbitarum ad sinum totum, $\pi:1$ ratio sinus distantiæ FTG nodi, & Planetæ attrahentis pariter ad sinum totum. Erit $\frac{FG \cdot AT}{FT}$, sive πa perpendicularis Ag ex A demissa in lineam nodorum, & erit $w\pi a$ perpendicularis Aa ex A demissa in planum orbitæ BPb. Insuper erit $aT = \sqrt{(a^2 - w^2\pi^2 a^2)}$ $= a\sqrt{(1 - w^2\pi^2)}$, $aM = \sqrt{(a^2 - w^2\pi^2 a^2 + b^2 \mp 2ax}$ $\sqrt{(1 - w^2\pi^2)})$, $AM^3 = (a^2 + b^2 \mp 2ax\sqrt{(1 - w^2\pi^2)})^{\frac{3}{2}}$, aut quia est $\sqrt{(1 - w^2\pi^2)} = 1 - \frac{1}{2}w^2\pi^2$, si negligantur quadraticæ ipsius w potestates, adhuc censeri poterit $AM^3 =$ $(a^2 + b^2 \mp 2ax)^{\frac{3}{2}}$. Quare cum sit $\frac{w\pi}{a^2}$ vis, qua punctum T trahitur perpendiculariter plano orbitæ, & vis, qua trahitur punctum M, sit $= \frac{w\pi a}{AM^3}$; erit duarum virium differentia, si-

ſive vis punctum M perpendiculariter diſtrahens a plano orbitæ $= \frac{w \pi a}{(a^2 + b^2 \mp 2ax)^{\frac{2}{3}}} = \frac{w \pi}{a^2}$

Sit porro mn ſpatium, quod omnibus hujuſmodi viribus a Planeta abſolvi poſſet, quo tempore percurrit arcum Mm, *fig.* 5., dimidium ſcilicet illius ſpatii, quod eodem tempore abſolveretur, ſi vires eædem omnes, per arcum Mm agentes, ſimul impreſſæ eſſent in loco M. Præſto eſt quod punctis M, T manentibus Planeta a loco M digreſſus poſt datum tempus ad n perveniet, & tota orbita circa MT veluti circa axem nutabit, atque in locum TMn tranſibit, & erit $Mm : mn$ ut BC ad arcum, quo punctum prioris nodi B ſupra orbitæ QFT planum elevabitur. Rurſus erit is arcus ad arcum BL, quo retrocedet nodorum linea ut $w : 1$, & fiet $BL = \frac{BC.mn}{w.Mm} = \frac{MZ.mn}{w.Mm}$, & angularis nodorum motus $= \frac{MZ.mn}{w.MT.Mm}$ Eſt autem, *fig.* 6., $PG : PT = MH : Mv$, & $PG : TG = MH : Hv$, & $Tv = TH \mp Hv = TH \mp \frac{TG.MH}{PG}$, $vz = \frac{TG.TH}{PT} \mp \frac{TG^2.MH}{PG.PT}$, $\pm MZ = \pm vz + Mv = \frac{\pm TG.TH}{PT} - \frac{TG^2.MH}{PG.PT} + \frac{PT.MH}{PG} = \frac{PG.MH}{PT} \pm \frac{TG.TH}{PT}$. Quare cum terminus poſterior in duobus quadrantibus RPT, rPT contrario ſigno deſtruatur, erit horarius nodorum motus $= \frac{PG.MH.mn}{w.PT^2.Mm} = \frac{\pm PG.mn.x}{bw.PT.Mm}$. Eſt autem motus horarius Planetæ in orbita ſua ut $\frac{Mm}{TM}$, ſive ut ſinus verſus arcus Mm directe, & arcus Mm reciproce, aut demum ut dimidia vis gravitatis directe, & reciproce ut arcus Mm. Quod ſi igitur quantitates materiæ in Planetis T, & A ſe habeant rurſus ut $M : 1$, & gravitas Planetæ M in centrum ſit $= \frac{M}{b^2}$, & pro ratione $PG : PT$ ſubſtituatur ratio $\pi : 1$, erit horarius Plane-

tæ

tæ motus ad motum horarium nodorum ut

$$\frac{M}{b^2} : \frac{\pm a\pi^2 x}{b\left(a^2 + b^2 \mp 2ax\right)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{\pi^2 x}{ba^2} \cdot$$

Positis hisce omnibus si qui attrahitur Planeta centro totius motus propior sit quam qui attrahit, & fractio, juxta casum primum primi problematis, resolvatur in seriem convergentem, negliganturque termini, qui ambiguo signo se destruunt, fiet horarius motus Planetæ ad motum horarium nodorum ut

$$\frac{M}{b^2} : \frac{3\pi^2 x^2}{ba^3} - \frac{15\pi^2 b x^2}{2a^5} + \frac{35\pi^2 x^4}{2ba^5} + \frac{105\pi^2 b^3 x^2}{8a^7} - \frac{315\pi^2 b x^4}{4a^7} + \frac{693\pi^2 x^6}{8ba^7}.$$

Si vero Planeta attrahens sit inferior, atque ordinetur series ut in casu secundo problematis ejusdem primi, motus horarii Planetæ attracti, & nodorum orbitæ inter se erunt ut $\frac{M}{b^2} : \frac{3\pi^2 a^2 x^2}{b^6} - \frac{15\pi^2 a^4 x^2}{2b^8} + \frac{35\pi^2 a^4 x^4}{2b^{10}}$ &c. Q. E. J.

Corollarium Primum.

Si angulus FTB, *fig.* 4. non sit major 180°, & corpus inter R, & B, aut r, & b reperiatur, MH, & MZ, *fig.* 5., contrariis signis afficientur, & nodi eadem progredientur directione cum Planeta M. Si Planeta describat arcus $R\,P\,b$, $r\,B$ regredientur nodi, & quiescent dumtaxat dum reperientur nodi in syzigiis, aut quando nodis ubilibet constitutis Planeta in quadraturis nodorum, aut nodis ipsis reperietur, & sit FG, MH, aut $MZ = o$. Integra tamen Planetæ ipsius revolutione nodorum motus fiet in antecedentia, sive a centro motus remotior, sive etiam propior sit Planeta attrahens.

Corollarium Secundum.

Juxta priorem casum problematis si nodi sint in quadraturis, & Planeta M in syzigiis, hoc est si sit $\pi = 1$, & $x = -b$

$=b$, erit motus horarius maximus nodorum $= \frac{3b}{a^3} - \frac{15b^3}{2a^5} + \frac{35b^3}{2a^5} + \frac{105b^5}{8a^7} - \frac{315b^5}{4a^7} + \frac{693b^5}{8a^7} = \frac{3b}{a^3} + \frac{10b^3}{a^5} + \frac{21b^5}{a^7}$. Si nodi in quadraturis, & Planeta ipse extra syzigias ubilibet reperiatur, fiet horarius nodorum motus $= \frac{3x^2}{ba^3} - \frac{15bx^2}{2a^5} + \frac{35x^4}{2ba^5} + \frac{105b^3x^2}{8a^7} - \frac{315bx^4}{4a^7} + \frac{693x^6}{8ba^7}$: & motus medius nodorum pro integra Planetæ ejusdem revolutione prodibit $= \frac{3b}{2a^3} - \frac{15b^3}{4a^5} + \frac{105b^3}{16a^5} + \frac{105b^5}{16a^7} - \frac{945b^5}{32a^7} + \frac{3465b^5}{128a^7} = \frac{3b}{2a^3} + \frac{45b^3}{16a^5} + \frac{525b^5}{128a^7}$. In casu altero erit horarius maximus nodorum motus $= \frac{3a^2}{b^4} + \frac{10a^4}{b^6} + \frac{21a^6}{b^8}$: & motus medius $= \frac{3a^2}{2b^4} + \frac{45a^4}{16b^6} + \frac{525a^6}{128b^8}$.

Corollarium Tertium.

In utroque autem casu motus horarius medius nodorum, qui singulis Planetæ attracti revolutionibus respondebit, dum nodi reperientur in quadraturis Planetæ attrahentis, erit ad motum medium pro aspectu alio quolibet nodorum, & loco Planetæ A, ut $1 : \pi^2$. Quare si ipse etiam Planeta attrahens in orbe suo moveri intelligatur, & accipiatur medium mediorum omnium, scilicet si pro π^2 scribatur $\frac{1}{2}$, erit in primo casu motus horarius corporis ad motum vere medium nodorum ut $\frac{4a^3M}{b^2} : 3b + \frac{45b^3}{8a^2} + \frac{525b^5}{64a^4}$.
In casu altero erunt horarii iidem motus inter se ut
$4b^2 . M : 3a^2 + \frac{45a^4}{8b^2} + \frac{525a^6}{64b^4}$.

Co-

Corollarium Quartum.

Si numeri ſubſtituantur ſpeciebus, & primus dumtaxat feriei terminus ſpectetur, erit motus horarius Saturni ad motum horarium nodorum in plano Jovialis orbitæ ut $4b^2 . M : 3a^2 = 361 : 0.09213552$, & ſi pro motu horario Saturni ſubſtituantur 360°, ſive $1296000''$ fiet tota Saturni revolutione nodorum motus $= \frac{116916.763382''}{361} = 324\frac{3}{4}''$. Eſt autem primus feriei terminus ad ſecundum ut $8b^2 : 15a^2 = 1805 : 1014$, & ſecundus ad tertium ut $72b^2 : 105a^2 = 5415 : 2366$. Quare ſi pro ſecundo termino $182''$, & $79''$ pro tertio addantur, prodibunt $586''$, & ſingulis feriei terminis celerius ſemper decreſcentibus totus nodorum motus una Saturni revolutione cenſeri poterit rotundo numero $600''$, & annis ſingulis $20''$ fixarum reſpectu in antecedentia. At ſtellæ fixæ annis ſingulis punctorum æquinoctialium reſpectu progrediuntur in conſequentia circiter $51''$. Nodi igitur Saturni annis ſingulis in plano orbitæ Jovis circiter $31''$ progredientur.

Corollarium Quintum.

Motus nodorum Jovis cum plano orbitæ Saturni, ipſius Saturni actione, erit tardior, & citius converget feries, quæ exprimit motum ipſum, ſubſtitutiſque numeris ut in *Coroll.* 1. *caſus* 1. primi problematis, erit motus horarius Jovis ad motum horarium medium nodorum ut $3.6982249 : 0.0001377 + 0.0000772 + 0.0000336 = 3.6982249 : 0.0002485$, atque integra revolutione Jovis fiet motus ipſe $= 87''$, & annis ſingulis $= 7\frac{1}{3}''$. Hic motus fixarum reſpectu cum ſit retrogradus, nodi orbitæ Jovis cum plano orbitæ Saturni punctorum æquinoctialium reſpectu progredientur $43\frac{2}{3}''$ annis ſingulis. Eodem modo regreſſio annua nodorum Martis, & Veneris

in plano orbitæ Jovis, ipſius Jovis actione, invenietur 17″, & 4″, & annua nodorum progreſſio æquinoctii reſpectu fiet 34″, & 47″. Motus nodorum orbitæ Mercurii in plano Jovialis orbitæ omnino nullus cenſeri poterit.

Corollarium Sextum.

Et quemadmodum Planetæ alii in planis immobilibus non feruntur, ita etiam planum Eclipticæ habebit motus ſuos, atque erit motus horarius Terræ ad motum horarium medium Eclipticæ ipſius cum plano orbitæ Jovis ut $4 . 52^3 . 100000 : 11121 \left(30 + \frac{45000}{8 . 52^2} + \frac{5250000}{64 . 52^4}\right) = 56243200000 : 358012$, & ſi rurſus pro motu horario Terræ in orbe ſuo ſubſtituantur 1296000″, fiet regreſſio annua nodorum, quæ ex attractione Jovis proficiſcitur, = 8″, poſito ſcilicet quod quantitates materiæ in Sole, & Jove ſe habeant ut 10000 : 11 . 121. Quod ſi maſſa Jovis cum Newtono ſtatuatur 9 . 37, evadet regreſſio eadem 6″45‴. Similibus computationibus, ſi Saturni maſſa ſtatuatur 3 . 029, erit motus horarius Terræ ad motum horarium medium nodorum, qui actione Saturni gignitur, ut 342950000000 : 94665, & motus annuus nodorum Terræ cum plano orbitæ Saturni fiet circiter 22‴.

Corollarum Septimum.

Si in Marte eadem haberetur materiae quantitas, quae in Terra eſt, foret horarius motus Terræ ad motum nodorum Eclipticæ cum plano orbitæ Martis ut 135000000 : 35, & regreſſio annua nodorum evaderet 20‴. Si denſitates Terræ, & Martis eædem ſint, & quantitates materiæ eamdem proportionem voluminum ſequantur, imminuendus erit nodorum motus in ratione 65 : 100, & fiet annis ſingulis 13‴. Pariter ſi denſitas in Terra, ac Venere, & quantitas materiæ ſit eadem, ſicuti idem volumen eſt, erit horarius Terrae motus ad motum horarium nodorum Eclipticae cum plano or-

orbitæ Veneris ut $400000000 : 5\left(3 \cdot 49 + \frac{45 \cdot 49^2}{800} + \frac{525 \cdot 49^4}{64\,0000}\right)$ $= 40000000 : 141$, & fiet regreſſio annua nodorum, quæ actioni Veneris reſpondet, $4\frac{1}{2}''$.

COROLLARIUM OCTAVUM.

Si ob maximam Planetæ attrahentis diſtantiam a centro motus termini omnes feriei negligendi ſint praeter primum, erit motus horarius Planetae attracti ad motum horarium maximum nodorum ut $\frac{M}{b^2} : \frac{3b}{a^3}$, ſive accuratius ut $\frac{M}{b^2} : \frac{3b}{a^3}\surd(1 - \pi^2)$ In Luna cum habeatur caſus iſte, & ſit media inclinatio orbitæ ad Eclipticam $5^{\circ}\ 9'$, & motus horarius $32.941057'$, erit $33''\ 2'''\ 48^{\text{iv}}\ 37^{\text{v}}$ motus horarius maximus nodorum, qui ſcilicet habetur quando Luna in ſyzigiis cum Sole, & nodi in quadraturis reperiuntur. Motus autem mediocris pro aſpectu eodem nodorum, & integra Lunae revolutione dimidius erit motus maximi, & fiet $= 16''\ 31'''\ 24^{\text{iv}}\ 18^{\text{v}}$. Denique motus medius pro loco, & aſpectu quolibet nodorum adhuc dimidius erit, videlicet $8''\ 15'''\ 42^{\text{iv}}\ 9^{\text{v}}$.

SCHOLION.

Haec, quae ad Lunae theoriam pertinent, breviter attigimus, ut innoteſceret Propoſitionem totam XXX. *lib.* 3. *Princip. Mathem.* Newtoni peculiare corrollarium eſſe Problematis hujus noſtri. Walmeslejus *Propoſ.* IX. de inaequalitatibus motuum Lunarium adeo nitide expoſuit caetera, quae motum nodorum Lunaris orbitae reſpiciunt, & duo Machinii theoremata, quibus motus medius Solis, & Lunae a nodo definitur, facile adeo demonſtravit, ut nihil hacce in re amplius deſiderari poſſe videatur. Ut igitur ad Planetas alios redeamus, Eulerus in praeclara diſſertatione de inaequalitatibus Jovis, & Saturni §. LXXXVII, methodo illa uſus, de qua initio nonnulla attigimus, invenit lineam nodorum orbitae

Saturni cum plano orbitae Jovis regredi annis ſingulis 18" reſpectu fixarum, & 33" punctorum Æquinoctialium reſpectu progredi. Deinde §. xc. motum annuum nodorum orbitae Jovis cum plano orbitae Saturni, atque orbitarum Martis, & Veneris cum orbita Jovis ſtatuit fixarum reſpectu 10", 15", 5". Tum etiam animadvertit ſic definitos motus nodorum Saturni, & Martis in plano orbitae Jovis cum tabulis Aſtronomicis apprime congruere. At vero, ut notat Caillius *num.* 516. Lectionum Aſtronomicarum, cum qui ante ſaeculum 16 floruerunt Aſtronomi perpaucas nobis, & parum accuratas obſervationes de Apheliorum, & nodorum motu reliquerint, difficile admodum eſt motus ipſos obſervationibus ſic definire ut pateat qui obſervationum, & theoriae conſenſus ſit. Idcirco cum regreſſiones annuas nodorum modo definiremus extremos calculos cum obſervationibus Aſtronomicis minime comparavimus. Nobis hacce in re ſufficit ſupputationes noſtras cum Eulerianis quam maxime convenire. Differentia enim omnis, quae 2" non ſuperat, major cenſeri nequit quam ut tribuatur differentiae elementorum, quae in inſtituendis calculis adhibentur. Eulerus inſuper in Monumentis anni 1754 Regiae Berolinenſis Scientiarum Academiae in diſſertatione de variationibus latitudinis fixarum, & obliquitatis Eclipticae *num.* xxii. motum nodorum Eclipticae cum planis orbitarum Saturni, Jovis, Martis, & Veneris definivit 22‴, 6" 57‴, 5‴, 5" 20‴ annis ſingulis. Methodum utique minime expoſuit Eulerus, qua ad concluſiones hujuſmodi pervenit. Gaudemus tamen calculi noſtri, & Euleriani rurſus tantum conſenſum eſſe, nec dubitamus Euleri methodum ampliorem noſtra, & praeſtantiorem eſſe. Major etiam invenietur cónſenſio utriuſque calculi, quia nos quidem denſitatem eamdem Martis, Veneris, & Terrae, ac materiae quantitates voluminibus proportionales ſtatuimus, Eulerus autem *num.* xxi. animadvertit denſiores eſſe oportere Planetas Soli viciniores: quod etiam a Newtono notatum eſt, cum in *Coroll.* 4. *Prop.* 8. *lib.* 3. *Princip.* notas jam, atque ex Satellitum motu erutas denſitates Terrae, Jovis, & Saturni compararet inter ſe invicem,

cem. Atque id rationi admodum eſt conſentaneum. Quoniam enim aqua noſtra, quae in Saturno rigeſceret, in orbe Mercurii in vapores abiret aucti caloris vi, dubitandum non eſt ad calorem magis accomodatos eſſe Planetas propiores Soli, adeoque eſſe etiam denſiores, cum materia omnis denſior, ut obſervat Newtonus, ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat. Eulerus etiam cum easdem Planetarum trium denſitates, quae notae ſunt, cum diſtantiis mediis a Sole contuliſſet, arbitratus eſt eam legem erui, quod denſitates ſequantur rationem ſubduplicatam mediorum motuum, qui eidem tempori reſpondent, ſive reciprocam ſubduplicatam temporum periodicorum. Juxta hanc legem augendo denſitatem Veneris, & Martis denſitatem minuendo, ſupputationibus iiſdem noſtris prodibit annuus motus nodorum Eclipticae cum planis orbitae Veneris, & Martis $5''$ $25'''$, & $9'''$. Si denſitas Mercurii, & quantitas materiae ſimili modo inveſtigetur, inſtituaturque ut ſupra calculus, fiet annuus motus nodorum Eclipticae cum plano orbitae Mercurii duorum tertiorum circiter.

CA-

Caput Quartum.

De varia inclinatione Orbitarum inter se.

Problema Quartum.

Dato nodorum motu invenire variationem inclinationis duarum orbitarum inter se.

Resolutio.

Sit recta VT, *fig.* 7., lineæ nodorum Bb perpendicularis, QT perpendicularis radio vectori MT, & QD perpendicularis ex Q demissa in VT. Ex puncto T elevetur TO perpendicularis plano orbitæ BMb, quæ sit radio MT æqualis, & majoris perspicuitatis gratia motus totius plani ex motu ipsius perpendicularis æstimetur. Manentibus omnibus ut supra, planum omne BMb ob vim perturbatricem circa radium MT nutabit, atque erit nodorum motus ad arcum, quo punctum B recedet a plano orbitæ Planetæ attrahentis ut $1:w$, & arcus a puncto B circa MT descriptus erit ad arcum Oo, quem eodem tempore describit perpendicularis erectæ extremum ut $BC:OT$, sive ut $BZ:BT$. At vero quia minimo quocumque tempore motus Oo, veluti rectilineus spectari potest, & fit secundum rectam QT, resolvi poterit in duos alios secundum TV, & Tb, atque erit ad motum, qui secundum TV fiet, & quo orbita BMb circa lineam nodorum Bb nutabit, ut $TQ:TD$, sive ut $MT:TZ$. Est enim angulus QTM æqualis angulo VTB, adeoque communem angulum VTM detrahendo supererunt æquales anguli QTV, MTB. Quare compositis rationibus erit nodorum motus ad motum variationis inclinationis ut $MZ:w.TZ$. Jam vero ob $Tv=TH\mp\frac{TG.MH}{PG}$, & $PT:PG=Tv:TZ$,

erit

erit $\pm TZ = \pm \frac{TH.PG}{PT} - \frac{TG.MH}{PT}$. Omiſſo igitur priore termino, qui in duobus quadrantibus ambiguo ſigno deſtruitur, erit horarius nodorum motus ad variationem horariam inclinationis ut $MZ : w.TZ = \frac{PG.MH}{PT} : w. - \frac{TG.MH}{PT} =$

$\pm x.\pi : \mp x.w.\sqrt{(1-\pi^2)} = \pi : -w.\sqrt{(1-\pi^2)}$. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Dato loco Planetæ attrahentis, per *Coroll.* 2. *Probl.* 3., eſt motus horarius medius nodorum, qui ſingulis Planetæ attracti revolutionibus reſpondet ut $\frac{3b}{2a^3} + \frac{45b^3}{16a^5} + \frac{525b^5}{128a^7}$, aut $\frac{3a^2}{2b^4} + \frac{45a^4}{16b^6} + \frac{525a^6}{128b^8}$ ductum in π^2, prout ſcilicet Planeta attrahens aut ſuperior, aut inferior eſt quam qui attrahitur. Media igitur variatio horaria inclinationis in caſu utroque iiſdem ſeriebus definietur ductis in $-w.\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$. Et quia rectangulum $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ nullum eſt in ſyzigiis, & quadraturis nodorum, in octantibus autem maximum; etiam variatio media inclinationis, quæ ſingulis Planetæ attracti revolutionibus reſpondet, nulla erit ſi Planeta attrahens aut in nodorum linea reperiatur, aut inde diſtet integro quadrante, atque in octantibus nodorum fiet maxima, in locis vero hinc inde æqualiter diſſitis ab octantibus manebit eadem.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si ipſe etiam Planeta attrahens in orbe ſuo moveri intelligatur, & primum a nodo b ad lineam quadraturarum VT tendat, minuetur ſemper media inclinatio orbitæ Planetæ attracti, attrahentiſque. Deinde vero dum a quadraturis progredietur ad nodum alterum, rectangulum $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ fiet negativum, augebitur iiſdem gradibus inclinatio quibus antea decreverat, & dum Planeta deveniet ad nodum B re-

restituetur in gradum pristinum. Quo autem tempore a nodo transibit ad quadraturas erit summa motuum omnium nodorum ad variationem totam inclinationis ut summa omnium π^2 ad summam totidem $-w\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$, sive ut $\frac{1}{8}\Delta : -\frac{1}{2}w = \Delta : -4w$. Quare erit variatio maxima inclinationis $\frac{6bw}{\Delta a^3}\left(1+\frac{15b^2}{8a^2}+\frac{175b^4}{64a^4}\right)$ in priore casu, & in casu altero $\frac{6a^2w}{\Delta b^4}\left(1+\frac{15a^2}{8b^2}+\frac{175a^4}{64b^4}\right)$.

Corollarium Tertium.

Si Planetæ attrahentis distantia infinita sit, & negligi possint de more termini omnes seriei præter primum, erit motus horarius nodi B ad motum horarium maximum, qui habetur nodo in quadraturis Planetæ attrahentis, & Planeta M in syzigiis constituto ut $MH.MZ.PG:MT^3$, adeoque variatio horaria inclinationis erit ad motum horarium maximum nodorum ut $w\sqrt{(1-\pi^2)}.TZ.MH:MT^2$: & si nodi sint in quadraturis ut $w.TH.MH:MT^2$. In hoc igitur casu, manente loco Planetæ attrahentis, variatio horaria inclinationis fiet maxima dum Planeta M erit in octantibus, & imminuetur dum Planeta ipse a quadratura ad syzigias cum illo tendet: deinde vero dum progredietur ad quadraturam alteram, & TH negativa evadet, aucta iisdem gradibus inclinatio redibit ad statum pristinum.

Corollarium Quartum.

Summa variationum omnium horariarum inclinationis dum eodem manente nodorum loco a quadraturis ad syzigias Planeta M progredietur, erit ad summam totidem maximorum motuum nodorum, ut summa omnium $w.TH.MH$ ad summam totidem MT^2, sive ut summa omnium $w.MT.MH.Hh$ ad MT^2 ductum in quadrantem circuli, aut de-

denique ut $\frac{1}{2}w$. MT^3 ad $\dot{M}T^2$ per quadrantem circuli multiplicatum, ſcilicet in ratione compoſita coſinus inclinationis orbitæ ad ſinum totum, & diametri ad peripheriam: quod eſt *Coroll.* 4. *Prop.* 34. *Lib.* 3. *Princip. Mathem.* Newtoni. Pro qualibet nodorum poſitione erit variatio horaria inclinationis ad motum horarium maximum nodorum ut $-w.\pi\sqrt{(1-\pi^2)}.MH.Hb \pm w\sqrt{(1-\pi^2)}.TH.Hb : MT.Tm$.

Corollarium Quintum.

Quare ſi nodi, & Planeta horis ſingulis elapſis reſtituerentur in locum ſuum, & nodorum locus una Planetæ revolutione maneret idem, tota inclinationis variatio, tempore unius revolutionis genita, eſſet ad motum maximum nodorum ut ſumma omnium $w\pi\sqrt{(1-\pi^2)}.MH.Hb$ ad $MT.Mm$, ſive ut $w\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ ductum in peripheriam ad Mm ductum in diametrum: quod eſt *Coroll.* 2. *Prop.* 34. *Lib.* 3. Et cum ſumma omnium variationum inclinationis ad variationem horariam mediocrem ſe habeat ut tota peripheria ad Mm; dato nodorum loco mediocris variatio horaria, ex qua, per totam revolutionem uniformiter continuata, tota illa inclinationis variatio poſſet gigni, eſſet ad motum nodorum maximum ut $w\pi\sqrt{(1-\pi^2)} : 2$: quod eſt tertium Newtoni Corollarium.

Problema Quintum.

Data variatione inclinationis Eclipticæ cum orbitis aliorum omnium Planetarum, invenire variationem inclinationis Eclipticæ, & Æquatoris.

Resolutio.

Eſto, *fig.* 8., Bb linea nodorum, & B nodus aſcendens orbitæ Planetæ alterius cum Ecliptica, Pr ſit interſectio

Eclipticæ, & Æquatoris, & P referat primum Arietis punctum, & puncta P, M, R, p secundum signorum ordinem se excipiant. Tum, juxta problema quartum nodi B motus in plano alterius orbitæ erit ad motum poli Eclipticæ circa vectorem radium MT ut $MZ : w . BT$, & motus poli Eclipticæ secundum rectam QT fiet, & in duos alios resolvi poterit secundum Qq, Tq. Motus insuper Poli Eclipticæ circa MT, & secundum TQ erit ad motum, qui secundum Tq, & circa lineam Pp fiet, quo scilicet inclinatio Eclipticæ, & Æquatoris variabitur, ut $TQ : Tq$, sive ut $TM : TN$. Anguli enim QTM, PTr sunt recti, & detracto utrimque communi PTQ supersunt æquales anguli QTr, MTP. Itaque erit nodorum motus ad variationem inclinationis Eclipticæ ut $MZ : w . TN$. Est vero $TN = Cos.\ MTP = Sin.\ MTB\ .\ Sin.\ PTB + Cos.\ MTB\ .\ Cos.\ PTB = \frac{MZ\ .\ BX + TZ\ .\ TX}{BT}$. Quare neglecto termino $TZ . TX$, qui per totum semicirculum bPB contrariis signis destruitur, erit motus nodorum Eclipticæ cum plano orbitæ Planetæ alterius ad variationem inclinationis Eclipticæ, & Æquatoris ut $MZ : w . \frac{MZ . BX}{BT} = BT : w . BX$. Q. E. J.

Corollarium Primum.

Si nodus ascendens B sit in signis Borealibus Eclipticæ, regredi non poterit in plano orbitæ Planetæ alterius nisi Æquatori propius accedendo: contra vero, si sit in signis Australibus, regrediendo recedet semper ab Æquatore. Itaque in primo casu motus inclinationis, qui fit circa lineam Pp, obliquitatem Eclipticæ imminuet, augebitque in casu altero. Porro sæculi hujus initio erant nodi ascendentes Saturni, & Jovis in signo Cancri 21° 13' 29", & 7° 29' 53", nodus ascendens Veneris in signo Geminorum 13° 59' 25", & nodi ascendentes Martis, & Mercurii in signo Tauri 17° 17' 25", & 14° 43'. Exscripsimus nodorum loca ex Lectionibus Astronomicis Caillii, ex quibus etiam sequentes men-

su-

ſuras omnes accipiemus. In ea igitur poſitione orbitarum, quæ modo eſt, conſpirant vires planetarum omnium ad imminuendam obliquitatem Eclipticæ, & Æquatoris.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si motum medium annuum nodorum Saturni, & Jovis cum plano Eclipticæ ſtatuamus 22‴, & 8″, ut in *Coroll. 6. Probl.* 3., & ſæcularem motum 37″, & 800″, & ſit w ſinus inclinationis Jovialis orbitæ ad Eclipticam; quia nodi utriuſque orbitæ parum diſtant a ſe invicem, & inclinatio orbitæ Saturni fere dupla eſt inclinationis orbitæ Jovis, utraque autem ſatis exigua eſt, variatio tota inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem, quæ integro ſæculo ex Jove ſimul, & Saturno oritur, cenſeri poterit $= 800''.w.\frac{BX}{BT} + 37''.2w.\frac{BX}{BT} = 874''.w.\frac{BX}{BT}$. Eſt autem w ſinus $1^\circ\ 19'\ 30'' = 0.023$ circiter, & $874''.w = 20''$. Rurſus eſt $\frac{BX}{BT}$ ſinus $82\frac{1}{2}^\circ = 0.9914449$. Fiet igitur ſæcularis variatio $19\frac{4}{5}''$. Si motus annuus nodorum Jovis ſtatueretur 6″ 45‴, ut prodiit ex altera maſſæ Jovis determinatione, fieret variatio eadem circiter 17″.

COROLLARIUM TERTIUM.

Pariter ſi motus annuus nodorum Veneris cum Ecliptica ſit 5″ 25‴, ut in fine ſcholii ſuperioris, & integro ſæculo 542″, quia inclinatio orbitæ Veneris ad Eclipticam eſt 3° 23′ 20″, cujus ſinus $= 0.059$, & longitudo nodi aſcendentis 73° 59′ 25″, cujus ſinus $= 0.96$ circiter, erit 30.7″ ſæcularis variatio obliquitatis Eclipticæ, quæ ex vi Veneris ortum ducet. Denique cum inclinatio orbitarum Mercurii, & Martis ad Eclipticam ſit 7°, & 1° 50′ 54″, nodorum motus integro ſæculo 3″, & 15″, longitudo nodi aſcendentis 44° 43′, & 47° 17′, erit 2″ circiter ſæcularis variatio, quæ

ex conjunctis viribus Mercurii, & Martis oritur. Quare variatio omnis, quæ ex viribus Planetarum omnium ſuperiorum, inferiorumque integro ſæculo ortum ducit, cenſeri poterit rotundo numero $50''$.

Corollarium Quartum.

Si ineunte anno 1750 Eclipticæ obliquitas æſtimetur $23^{\circ}\ 28'\ 19''$, ut eam in tabulis Aſtronomicis ſtatuit Cl. De la Caille, fiet exeunte hoc ſæculo $23^{\circ}\ 27'\ 54''$, & pro initio hujus ſæculi ſtatuenda erit $23^{\circ}\ 28'\ 44''$. Hoc poſito ad datum quodcumque tempus, Planetarum nodis ſuo ſemper loco manentibus, ſupputari poterit Eclipticæ obliquitas. Ita noni ſæculi initio eruetur $23^{\circ}\ 35''$, & Albategnii tempore, ſive anno poſt Chriſtum natum 750, prodibit $23^{\circ}\ 36'$, & $23^{\circ}\ 45'$ tempore Pytheæ, ſive annis 300 ante Chriſtum. Hæc pro iiſdem temporibus cenſeri poterit media Eclipticæ obliquitas, neglectis ſcilicet æquationibus aliis, quæ ex nutatione terreſtris axis oriuntur, & dato quod nodi aſcendentes Planetarum diſtantias ſuas a punctis Æquinoctialibus, & longitudines ſenſibiliter non mutent.

Corollarium Quintum.

Quia vero, & Planetarum nodi, & puncta Æquinoctialia fixarum reſpectu regrediuntur, & reſpectu punctorum Æquinoctialium nodi feruntur ſemper in conſequentia, ſubſequentibus ſæculis ea variationis pars, quæ pendet ex Venere augeri debet, & ea quæ ex Jove pendet imminui, ſicuti elapſis ſæculis contraria ratione & partem illam minorem, & majorem hanc eſſe oportuit. Et licet totum variationis diſcrimen ſæculorum aliquot intervallo ſatis exiguum ſit, ſi tamen longius progrediamur fiet denique ſenſibile. Ita cum juxta tabulas Aſtronomicas initio æræ vulgaris nodus aſcendens Veneris fuerit in ſigno Tauri $19^{\circ}\ 20'$, & nodus aſcendens Jovis in ſigno Geminorum $13^{\circ}\ 58'$, ſi inſtituatur ut ſupra calculus, variatio tota obliquitatis Eclipti-

cæ

cæ, quæ primo æræ vulgaris sæculo respondet, 6'' circiter minor prodibit, quam quæ respondet sæculo nostro.

Corollarium Sextum.

Quando nodi ascendentes orbitarum Jovis, & Veneris ad Australia signa pervenient, augebitur iisdem gradibus Eclipticæ obliquitas, quibus antea imminuta est, & integra nodorum revolutione restituetur in gradum pristinum. Vicissitudines omnes obliquitatis longissima periodo complectentur. Siquidem motus nodi ascendentis Jovis, & Veneris a punctis Æquinoctialibus cum septendecim sæculis sit circiter 21°, & 25°, tota nodi ipsius revolutio non absolvetur, nisi sæculis 291, & 245, quorum dimidio augebitur Eclipticae obliquitas, & dimidio imminuetur. Vires autem Jovis, & Veneris ad immutandam obliquitatem præ aliorum omnium Planetarum viribus potiores sunt.

Corollarium Septimum.

Variatio maxima, quæ ex Jove, & Venere oriri potest, fieret integro sæculo circiter 18'', & 32'', & sæculis $145\frac{1}{2}$, & $122\frac{1}{2}$ evaderet 2619'', & 3920'', si scilicet nodi ascendentes semper in primis Cancri punctis permanerent. Est autem summa variationum omnium ad summam variationum totidem maximarum ut summa sinuum omnium ad summam totidem radiorum, vel ut radius ad quadrantem circuli, sive ut dupla diameter ad peripheriam. Tota igitur variatio, quæ ex Jove, & Venere vere orietur, erit circiter $27\frac{3}{4}'$, & $41\frac{1}{2}'$. Quare duorum Planetarum nodis a se invicem fere uno signo distantibus, censeri poterit limes variationis maximæ circiter 1°.

Pro-

Problema Sextum.

Iisdem positis invenire variationem punctorum Æquinoctialium, quæ ex viribus Planetæ alterius cujuslibet proficiscitur.

Resolutio.

Positis omnibus ut antea, erit motus nodi ascendentis B ad motum illum poli Eclipticæ, qui secundum rectam TN fiet, & quo tota Ecliptica circa Rr veluti circa axem nutabit, ut $MZ : w . \mathfrak{Q}q = MZ : w . MN = BT : -w . TX$. Est enim $MN = \frac{BX.TZ - MZ.TX}{BT}$. Ita vero dum Eclipticæ planum circa lineam Rr feretur, puncta $\mathfrak{P}$, & p perpendiculariter recedent a priore plano, & alia fiet intersectio Eclipticæ, & Æquatoris. Motus autem poli Eclipticæ, & puncti $\mathfrak{P}$ circa Rr idem erit, & motus puncti $\mathfrak{P}$ erit ad motum punctorum Æquinoctialium ut sinus ad cosinum obliquitatis Eclipticæ, sive ut tangens obliquitatis Eclipticæ ad sinum totum. Itaque motus nodi ascendentis B erit ad motum punctorum Æquinoctialium in ratione composita $BT : -w . TX$, & tangentis obliquitatis Eclipticæ ad sinum totum. Q. E. J.

Corollarium Primum.

Si nodus ascendens B sit inter punctum Æquinoctii verni $\mathfrak{P}$, & puncta Solstitialia R, r, TX positiva erit, & puncta Æquinoctialia actione Planetæ alterius ferentur contra ordinem signorum: contra vero progredientur in consequentia si TX fiat negativa, & nodus ascendens B reperiatur puncta inter Solstitialia, & punctum Æquinoctii Autumnalis. In ea igitur positione orbitarum, quæ modo est, actione quidem Saturni, & Jovis imminuetur præcessio annua Æquinoctiorum, quæ ex Sole, & ex Luna oritur, actione vero aliorum Planetarum augebitur. Co-

COROLLARIUM SECUNDUM.

Quia nodi aſcendentes Jovis, & Saturni a punctis Solſtitialibus diſtant $7\frac{1}{2}^{\circ}$, & $21^{\circ}\ 13'$, manentibus cæteris ut in *Coroll.* 2. ſuperioris Problematis, & poſita obliquitate Eclipticæ $23^{\circ}\ 28\frac{1}{3}'$, fiet ſæcularis motus punctorum Æquinoctialium ob vim Planetæ utriuſque circiter $7''$. Ob vim aliorum Planetarum evadet fere $-21''$. Nodus enim aſcendens Veneris antecedit punctum Solſtitii æſtivi $16^{\circ}\ 1'$. Actione igitur Planetarum omnium regredientur ſingulis ſæculis puncta Æquinoctialia circiter $14''$: quæ quantitas præ tota Æquinoctiorum præceſſione, quæ annis ſingulis fit $50.\ 3''$, nimis exigua eſt, quam ut obſervationibus poſſit detegi.

COROLLARIUM TERTIUM.

Subſequentibus ſæculis minor fiet æquatio, quæ ex Venere, & major quæ ex Jove, & Saturno pendet: utraque vero eamdem periodum habebit, qua variatio obliquitatis Eclipticæ complectitur, niſi quod variationis hujus periodus a punctis Æquinoctialibus, illius vero a punctis Solſtitialibus ſupputari debeat. Antecedentibus ſæculis majorem eſſe oportuit æquationem quæ ex Venere, & minorem quæ ex duobus aliis Planetis oritur, & differentia omnis ad præceſſionem annuam Æquinoctiorum proportionem ſenſibilem habere aliquando potuit. Ita ſi primo æræ vulgaris ſæculo ſtatuatur Eclipticæ obliquitas $23^{\circ}\ 42'$, fiet æquationum duarum differentia integro ſæculo $-58''$.

SCHOLION.

Habemus igitur ex theoria gravitatis erutam, ac diremptam quæſtionem, quæ circa mutationem obliquitatis Eclipticæ Aſtronomos exercet. Cl. Monnierius in Præfatione In-

Institutionum Astronomicarum, cum argumenta, quæ hinc inde ex Astronomicis observationibus deduci solent, accurate explicasset, collegit iisdem observationibus non adhuc satis constare utrum Eclipticæ obliquitas imminuatur nec ne. Id ego etiam diu sensi cum in toto gravitatis systemate nullam adhuc caussam deprehenderem, qua obliquitas imminueretur. Considerabam enim Pytheam, a quo Eclipticæ obliquitas 23° 51' statuta est, Solstitialem umbram Massiliæ ejusdem longitudinis invenisse, cujus Gassendus anno 1636: observationes alias, quæ in ipsa veluti Astronomiæ infantia institutæ sunt, & quibus Solstitialis, ac Meridiana Solis declinatio armillarum ope investigabatur, cum Ricciolio correctas, & refractionis ratione habita emendato errore Erathostenis, quem Hipparchus, & Ptolemæus retinuerunt, obliquitatem Eclipticæ exhibere 23° circiter cum dimidio: cæteras denique observationes, quæ post magnorum Quadrantium, Telescopiorum, & Dioptrarum usum sunt habitæ additis correctionibus omnibus, atque iis potissimum, quæ ex vario aspectu nodorum Lunæ, & nutatione axis terrestris pendent, inter se magis convenire. Eulerus in dissertatione de inæqualitatibus Saturni, & Jovis §. xcii. animadvertit primum actione aliorum Planetarum Eclipticæ planum dimoveri e loco suo: deinde in Commentariis Berolinensibus anni 1754 ex dato nodorum motu sæcularem imminutionem obliquitatis Eclipticæ investigavit. Walmeslejus etiam in Transactionibus Philosophicis argumentum idem nitide exposuit, quamvis eam tantum variationis partem considerasset, quæ ex Jove oritur. Supra argumentum ipsum per partes singulas perspicue, ac breviter quam fieri potuit explicatum est. Sunt autem præcipua capita: Obliquitatem Eclipticæ, Planetarum orbitis inter se positis ut modo sunt imminui singulis sæculis 48" circiter, aut 50", æquationem sæcularem subsequentibus sæculis majorem fieri oportere, & sæculis elapsis minorem fuisse: variationum omnium limitem unius fere gradus esse, eamdemque esse periodum, qua revolutio nodorum uniuscujusque orbitæ definitur. Ita de observationibus rectius judicium ferri poterit. In primis falsum est quod nonnulli au-

authore Herodoto, atque ex veteri traditione Ægyptiorum asseruerunt Eclipticam fuisse aliquando Æquatori circulo perpendicularem. Falsum est etiam, quod Louvillæus in Actis Eruditorum Lipsiensium anni 1719 contendebat, Eclipticæ obliquitatem singulis sæculis integro minuto ita imminui, ut demum cum Æquatore congruere debeat. Falsum est denique, quod nonnulli suspicabantur, differentiam obliquitatis Eclipticæ, aut tantam olim fuisse, aut tantam fore aliquando, ex qua aliæ tempestatum vicissitudines, aut fuerint, aut esse possint. Priores Pytheæ observationes non solum minus accuratæ sunt, sed etiam cum legibus naturæ minus conveniunt: cum Eclipticæ obliquitas iis temporibus 23° 42' minor fuerit, ut ex *Coroll.* 4., & 5. *Problem.* 5. præsto est. Albategnii autem, atque Arabum observationes, quæ altissimorum gnomonum ope instituebantur, tantæ indiligentiæ accusari nequeunt. Albategnius obliquitatem Eclipticæ definivit 23° 35'. Arabes alii Thebit, & Mahmud annis æræ vulgaris 901, & 992 ipsam statuerunt 23° $33\frac{1'}{2}$, & 23° $32\frac{1'}{3}$. Id theoriæ conforme esse Eulerus animadvertit in dissertatione de obliquitate Eclipticæ num. XXVI: quamvis antecedente numero indicaverit calculum omnem precariæ, atque incertæ hypothesi inniti quod eadem semper fuerit inclinatio orbitarum Jovis, & Veneris ad Eclipticam. Et plane si inclinatio orbitarum major fuisset aliquando, quam modo est, major etiam prodiisset æquatio imminutæ inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem. At vero in *Coroll.* 2. *Problem.* 4. observatum est eamdem semper manere inclinationem mediam Eclipticæ cum aliorum Planetarum orbitis, licet inclinatio Eclipticæ ad Æquatorem singulis sæculis fiat minor: unde etiam certius constat theoriæ cum observationibus Arabum consensus. Tycho, aliique Astronomi 16 sæculi Eclipticæ obliquitatem posuerunt 23° 31': quo etiam observationes Copernici reducuntur si 2' addantur ob refractionem. Elapso sæculo 23° 30', & 23° 29' deprehensa est. Ut unam ex observationibus omnibus seligamus, quae melioribus instrumentis peracta est, Flamsteedius mense Junio anni 1691 altitudinem meridianam

limbi Solis superioris Grenovicii deprehendit $27^\circ\ 45'\ 30''$, vel $27^\circ\ 45'\ 35''$, limbi vero inferioris $28^\circ\ 16'\ 55''$, vel $28^\circ\ 17'$: quarum altitudinem summa $56^\circ\ 2'\ 25''$, vel $56^\circ\ 2'\ 35''$, vel medium Arithmeticum sumendo $56^\circ\ 2'\ 30''$ bifariam divisa altitudinem centri Solaris dabit $28^\circ\ 1'\ 15''$, & erroribus instrumenti correctis $27^\circ\ 59'\ 10''$, & parallaxi demum, ac refractionibus supputatis $27^\circ\ 59'\ 37''$. Quia igitur in Grenoviciensi observatorio Æquatoris distantia a vertice est $51^\circ\ 28'\ 30''$, fiet observata Eclipticae obliquitas $23^\circ\ 28'\ 53''$: & quia tunc temporis nodus ascendens Lunaris orbitae circa 20° Piscium reperiebatur, $8''$ subtrahendo ob nutationem terrestris axis, fiet obliquitas media $23^\circ\ 28'\ 45''$. Quod si igitur pro anno 1750 statuatur cum Cl. Caillio $23^\circ\ 28'\ 19''$, fiet variatio obliquitatis $26''$ singulis annis 59, & integro saeculo $44''$, ut etiam ab eodem Caillio in tabulis Astronomicis determinata est. Cassinus in elementis Astronomiae animadvertit variationem obliquitatis Eclipticae, quae 66 annis respondet, ex serie plurium observationum prodire $30''$, scilicet uno saeculo $45\ \frac{1}{2}''$.

DE

DE

INÆQUALITATIBUS

PLANETARUM

IN ORBITIS ELLIPTICIS

LIBER SECUNDUS.

DE
INÆQUALITATIBUS
IN ORBITIS ELLIPTICIS
CAPUT PRIMUM.
De viribus Planetarum in orbitis Ellipticis.
LEMMA PRIMUM.

SI in Ellipsi $ZPzp$, *fig.* 9., sit axis major $Zz=2b$, minor $Pp=2c$, excentricitas $TD=\varphi$, & centro T, ac radio TM, qui sit semiaxi majori æqualis describatur circulus $TMPMp$, & statuatur $TR=\pm u$; erit $CR^2=b^2-u^2\pm 2\varphi u+\frac{\varphi^2 u^2}{b^2}-2\varphi^2\mp\frac{2\varphi^3 u}{b^2}+\frac{\varphi^4}{b^2}$, adeoque $TC^2=b^2\pm 2\varphi u+\frac{\varphi^2 u^2}{b^2}-2\varphi^2\mp\frac{2\varphi^3 u}{b^2}+\frac{\varphi^4}{b^2}$, & $TC=b\pm\frac{\varphi u}{b}-\frac{\varphi^2}{b}$. Est autem $TC:TM=TR:TN$. Erit igitur $\pm x=\frac{\pm b^2 u}{b^2\pm\varphi u-\varphi^2}$, $b^2\mp\varphi x=\frac{b^4-b^2\varphi^2}{b^2\pm\varphi u-\varphi^2}$, & $\frac{bc^2}{b^2\mp\varphi x}$ $=\left(\frac{b^2-\varphi^2}{b^2-\varphi^2}\right)\left(\frac{b^2\pm\varphi u-\varphi^2}{b}\right)=b\pm\frac{\varphi u}{b}-\frac{\varphi^2}{b}=TC.$

PRO-

PROBLEMA PRIMUM.

Si Planeta in Ellipsi $ZCzC$ moveatur, *fig.* 10., & Planeta alius statuatur in loco A, determinare vires omnes perturbatrices.

RESOLUTIO.

Quia si planetæ attrahentis massa unitate exprimatur vis tota ipsius secundum AC exercita est $= \frac{1}{AC^2}$, erit vis addita gravitati Planetæ C in focum $T = \frac{CT}{AC^3}$, & vis detracta gravitati $= \frac{AT.TO}{AT.AC^3} - \frac{TO}{AT^3} = \frac{AT.TH}{CT.AC^3} - \frac{TH}{CT.AT^2}$, & tertia vis directione sua radio vectori CT perpendicularis $= \frac{AT.AO}{AT.AC^3} - \frac{AO}{AT^3} = \frac{AT.CH}{CT.AC^3} - \frac{CH}{CT.AT^2}$. Jam vero est $\frac{TH}{CT} = Cos.\ CTH = Sin.\ ATZ.\ Sin.\ CTZ + Cos.\ ATZ.\ Cos.\ CTZ$, & $\frac{CH}{CT} = Sin.\ ATZ\ Cos.\ CTZ - Cos.\ ATZ.\ Sin.\ CTZ$. Quare si ad vitandam confusionem fiat $TN = \pm x$, $MN = +-y$, & denotet $\pm x$ abscissas tam positivas, quam negativas, & $+-y$ utrasque semi-ordinatas tam positivis, quam negativis abscissis respondentes, ac fiat insuper $AT = a$, Sinus anguli $ATZ = m$, Cosinus $= n$, erit $\frac{TH}{CT} = \frac{+-my \pm nx}{b}$, & per lemma 1. $TH = (+-my \pm nx). \frac{c^2}{b^2 \mp \varphi x}$, $CH = (\pm mx -+ ny). \frac{c^2}{b^2 \mp \varphi x}$, & vis gravitati addita evadet $= \frac{CT}{AC^3} =$

$$\frac{CT}{(AT^2 - 2AT.TH + TH^2 + CH^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{CT}{(AT^2 - 2AT.TH + CT^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{bc^2}{(b^2 \mp \varphi x)\left(a^2 - \frac{2ac^2(\pm nx +- my)}{b^2 \mp \varphi x} + \frac{b^2c^4}{(b^2 \mp \varphi x)^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$ & vis

de-

detracta gravitati =

$$\frac{\pm anx + - amy}{b\left(a^2 - \frac{2ac^2(\pm nx + - my)}{b^2 \mp \varphi x} + \frac{b^2 c^4}{(b^2 \mp \varphi x)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\mp nx - + my}{ba^2},$$

ac denique vis alia radio vectori perpendicularis =

$$\frac{\pm amx - + any}{b\left(a^2 - \frac{2ac^2(\pm nx + - my)}{b^2 \mp \varphi x} + \frac{b^2 c^4}{(b^2 \mp \varphi x)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\mp mx + - ny}{ba^2}.$$

Q. E. J.

COROLLARIUM.

Ex posterioris formulæ contemplatione præsto est vim perpendicularem nullam esse quando Planeta C aut reperitur in recta AT, aut pervenit ad rectam aliam, quæ AT ad rectos angulos secat in puncto T. Est enim in hisce casibus $m:n = y:x$, & quantitates mx, ny contrariis signis afficiuntur. Patet etiam eadem vi perpendiculari augeri velocitatem projectionis quando x, & y negativa est, aut quando y negativa est, & mx major est quam ny, aut si sit y positiva, ny major maneat quam mx. In casibus contrariis contrarium accidit.

PROBLEMA SECUNDUM.

Si excentricitas orbitæ ellipticæ sit adeo parva, ut possint negligi plusquam quadraticæ ipsius potestates, determinare vim perpendicularem radio vectori.

RESOLUTIO.

Primo in denominatore postremæ formulæ antecedentis problematis, qua vis perpendicularis radio vectori definiebatur, si divisio instituatur more solito, & negligantur plus quam quadraticæ excentricitatis potestates, fiet

$-2a$

$$-\frac{2ac^2(\pm nx+-my)}{b^2\mp\varphi x}=\frac{2ac^2}{b^2}(\mp nx-+my)$$
$$-\frac{2ac^2\varphi}{b^4}(nx^2\pm\mp mxy)+\frac{2ac^2\varphi^2}{b^6}(\mp nx^3-+mx^2y)$$ &
$$\frac{b^2c^4}{(b^2\mp\varphi x)^2}=\frac{c^4}{b^2}\mp\frac{2c^4\varphi x}{b^4}+\frac{3c^4\varphi^2x^2}{b^6}.$$
Tum vero ſi juxta binomii formulam in lemmate ſecundo lib. 1. traditam denominator integer in ſeriem reſolvatur, accipiaturque $a^2+\frac{c^4}{b^2}+\frac{2ac^2}{b^2}(\mp nx-+my)$ loco termini prioris $\mathcal{P}$, & ſimiliter negligantur pluſquam quadraticæ excentricitatis poteſtates, vis perpendicularis expreſſio in hanc aliam degenerabit
$$\frac{\pm amx-+any}{b\mathcal{P}^{\frac{3}{2}}}\mp\frac{mx+-ny}{ba^3}-\frac{3ac^4\varphi}{b^5\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}(mx^2\mp\pm nxy)$$
$$+\frac{3a^2c^2\varphi}{b^5\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}(\pm mx-+ny)(nx^2\pm\mp mxy)-\frac{9ac^4\varphi^2}{2b^7\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}(\pm mx^3-+nx^2y)$$
$$+\frac{3a^2c^2\varphi^2}{b^7\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}(\pm mx-+ny)(\pm nx^3+-mx^2y)+\frac{15ac^4\varphi^2}{2b^9\mathcal{P}^{\frac{7}{2}}}(\pm mx-+ny)$$
$$(\pm c^2x-nax^2\mp\pm maxy)^2.$$ Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si de Luna ſit ſermo, ob maximam Solis diſtantiam pro $\mathcal{P}$ ſcribi poterit a^2, & negligi poterunt alii omnes termini, in quibus quantitas a in denominatore poſita ſuperat tertiam dimenſionem. Hoc dato priores duo antecedentis formulæ termini ſe mutuo deſtruent, tertius autem, quintus, & ſeptimus evaneſcent ob parvitatem, & ſi pro c^2 ſcribatur b^2, tota vis perpendicularis, quæ æquabilem arearum Lunæ deſcriptionem perturbat, fiet =
$$\frac{3\varphi}{b^3a^3}(\pm mx-+ny)(nx^2\pm\mp mxy)+\frac{3\varphi^2}{b^5a^3}(\pm mx-+ny)$$
$$(\pm nx^3+-mx^2y).$$

Co-

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si negligantur etiam ii termini, qui ob ſigni ambiguitatem ſingulis revolutionibus ſe mutuo deſtruunt, ſupererit pro vi tota perturbatrice $\frac{3\varphi^2}{b^5 a^3}(mnx^4 - mnx^2y^2)$. Ita fiet juxta lemma tertium *lib.* 1. vis media radio vectori Lunæ perpendicularis $= \frac{3mn\varphi^2}{ba^3}$: nulla erit ſcilicet quando linea a Sole ad Terram ducta cum diametro tranſverſa, aut conjugata Lunaris orbitæ coincidet, & fiet m, aut $n = 0$. Hinc inde vero in octantibus erit maxima.

COROLLARIUM TERTIUM.

Quando m, & n aut ſimul poſitivæ, aut ſimul negativæ erunt, quando nimirum Luna poſt ſyzigias cum Sole tendet ad quadraturas ſuas cum linea Apſidum, vis perpendicularis radio vectori revolutione integra Lunam accelerabit, retardabit autem in ea Lunaris orbitæ poſitione, in qua Luna a Sole digreſſa ad Aphelium ſuæ orbitæ, aut ad Perihelium proficiſcetur, & alterutra ex quantitatibus m, & n negativa erit. Singulis autem Apogæi revolutionibus ſeſe invicem vires mediæ compenſabunt in orbita elliptica, ſicuti in orbita circulari ſingulis revolutionibus Lunæ ſeſe invicem compenſare neceſſe eſt.

COROLLARIUM QUARTUM.

Quod ſi pro aliis Planetis alii etiam ſerierum termini ſupputentur, & negligantur qui ambiguo ſigno ſe deſtruunt, & medium ex aliis omnibus accipiatur, fiet vis media quæ æquabilem arearum deſcriptionem perturbabit $=$ $-\frac{3\varphi^2 mn}{4ba^3}(1 + \frac{5b}{2a} \&c) + \frac{3b\varphi m}{8a^4}(1 + \frac{5b^2}{4a^2} \&c)$: quæ quidem evaneſcet ſimiliter quando Planeta attrahens in productione

diametri transversæ reperietur, non vero quando erit in diametro conjugata orbitæ ellipticæ.

Corollarium Quintum.

Quod si vero Planeta attrahens inferior sit, & distantia ipsius a centro in numeratores serierum rejiciatur, & simili modo instituatur calculus, erit $-\frac{3a\phi m}{2b^4}\left(1+\frac{5a^2}{8b^2}+\frac{5.7a^4}{8.8b^4}\right)$ vis media, quæ dato Planetæ attrahentis loco pro singulis Planetæ attracti revolutionibus respondebit. Quare neglectis aliis serierum terminis, si ille quidem in diametro transversa maneat vis media nulla erit, at si in diametro conjugata reperiatur vis media maxime augebitur.

Problema Tertium.

Iisdem positis determinare vim aliam, quæ demitur, & quæ adjicitur gravitati.

Resolutio.

Pars prior. Si in secunda formula *Probl.* 1. substitutiones eædem fiant, quæ in *Probl.* 2., evadet vis, qua imminuetur gravitas Planetæ in focum =

$$\frac{\pm anx + - amy}{b P^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{nx - + my}{b a^2} - \frac{3a^2c^4\phi}{b^5 P^{\frac{5}{2}}}(nx^2 \pm \mp mxy)$$
$$+ \frac{3a^2c^2\phi}{b^5 P^{\frac{5}{2}}}(\pm nx + - my)(nx^2 \pm \mp mxy) - \frac{9ac^4\phi^2}{2b^7 P^{\frac{5}{2}}}(\pm nx^3 + - mx^2y)$$
$$+ \frac{3a^2c^2\phi^2}{b^7 P^{\frac{5}{2}}}(\pm nx + - my)(\pm nx^3 + - mx^2y) + \frac{15ac^4\phi^2}{2b^9 P^{\frac{7}{2}}}(\pm nx + - my)$$
$$(\pm c^2x - nax^2 \mp \pm maxy)^2.$$

Quod erat primum.

Pars altera. Quia vero est $\frac{bc^2}{b^2 + \phi x} = \frac{c^2}{b} \pm \frac{c^2\phi x}{b^3} + \frac{c^2\phi^2x^2}{b^5}$, substitutionibus singulis in priore formula rite factis, prodibit

bit vis, quæ addetur gravitati =

$$\frac{b^4 c^2 \pm b^2 c^2 \varphi x + c^2 \varphi^2 x^2}{b^5 P^{\frac{3}{2}}} + \frac{3 c^4 \varphi (a n x^2 \pm\mp a m x y \mp c^2 x)}{b^5 P^{\frac{5}{2}}}$$

$$-\frac{3 c^4 \varphi^2 (5 c^2 x^2 \mp 4 a n x^3 + 4 a m x^2 y)}{2 b^7 P^{\frac{5}{2}}} + \frac{15 c^6 \varphi^2 (\pm c^2 x - n a x^2 \mp\pm m a x y)^2}{2 b^9 P^{\frac{7}{2}}}.$$

Quod erat alterum.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si Planeta attrahens sit superior, atque ex formula prioris partis hujus Problematis subtrahatur formula secundæ partis, prodibit totum gravitatis decrementum, quod ex actione superioris ipsius Planetæ oritur: & si ex formula secundæ partis subtrahatur formula partis prioris prodibit totale incrementum gravitatis, quod haberi debet ubi Planeta attrahens foco orbitæ ellipticæ propior sit, quam qui attrahitur.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Quod si eodem modo resolvantur denominatores singuli in series, & quantitates mediæ accipiantur, fiet in primo casu decrementum medium gravitatis, quod dato Planetæ attrahentis, & superioris loco, pro singulis Planetæ attracti revolutionibus respondet =

$$\frac{b}{2a^3} - \frac{5\varphi^2}{8ba^3} + \frac{9b^3}{16a^5} - \frac{15b\varphi^2}{16a^5} + \frac{3\varphi^2 n^2}{4ba^3} + \frac{9b\varphi n}{8a^4} + \frac{405 b\varphi^2 n^2}{16a^5} - \frac{315 b\varphi^2 m n}{16a^5} \text{ \&c.}$$

COROLLARIUM TERTIUM.

Decrementum igitur gravitatis evadet mediorum omnium decrementorum maximum quando Planeta attrahens cum Aphelio inferioris Planetæ conjungetur. In quadraturis cum ipso Aphelio, & in oppositione, quando scilicet erit $n = -1$, minus fiet decrementum idem, quam in con-

 jun-

junctione. In oppositione autem majus, aut minus esse poterit quam tempore quadraturarum prout $\frac{3\varphi^2}{4ba^3}$ majus aut minus erit quam $\frac{9b\varphi}{8a^4}$.

COROLLARIUM QUARTUM.

Si Planeta attrahens tanto intervallo a foco distet, ut possint negligi fractiones omnes, in quibus occurrunt facta ex quantitatibus b, & φ plusquam unius dimensionis, fiet decrementum medium gravitatis $\frac{b}{2a^3} - \frac{5\varphi^2}{8ba^3} + \frac{3\varphi^2 n^2}{4ba^3}$, maximum scilicet quando Planeta ipse cum Aphelio, ac Perihelio orbitæ ellipticæ conjungetur, atque erit $n = \pm 1$, minimum vero in quadraturis, ubi evadit $n = 0$. Qui casus in Luna cum locum habeat, constat quod in scholio Lunaris theoriæ Newtonus asseruerat: *Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis Lunaris transit per Solem, quam ubi eadem ad rectos est angulos cum linea Terram, & Solem jungente.*

COROLLARIUM QUINTUM.

In casu autem altero fiet medium gravitatis incrementum, quod ex actione Planetæ inferius positi proficiscitur $= \frac{1}{b^2} + \frac{3a^2}{4b^4} + \frac{45a^4}{64b^6} + \frac{5\varphi^2}{4b^4} + \frac{75a^2\varphi^2}{16b^6} - \frac{3a\varphi n}{b^4} - \frac{15a^3\varphi n}{4b^6} + \frac{39a^2}{8}\frac{\varphi^2 n^2}{b^6}$ maximum scilicet evadet quando quantitas n erit $= -1$, quando scilicet Planeta attrahens, & inferior cum Perihelio orbitæ ellipticæ conjungetur. Quando eidem Perihelio opponetur Planeta attrahens, atque erit $n = 1$, gravitatis incrementum fiet minimum mediorum omnium: hinc inde vero in quadraturis vere medium permanebit.

SCHO-

SCOHLION.

In dissertatione illa, quam primo ad Regiam Parisiensem Scientiarum Academiam transmisimus, exposuimus seriem totius calculi, quo vires mediæ superiorum, inferiorumque Planetarum investigantur. Ipsius instituendi methodum, ac rationem lector percipiet ex subsequente capite, in quo pro supputandis mutationibus vis projectilis, similes formulæ evolvendæ, ac similiter reducendæ erunt. Hic, quoniam longissimus, & molestissimus est idem virium mediarum calculus, satis esse existimavimus formulas ultimo prodeuntes recensere, & corollaria quædam attingere, quæ ex formularum contemplatione deduci possunt. Alia etiam exinde profluunt. Data velocitate projectionis vires centripetæ cum sint reciproce ut radii, intelligitur facile iisdem auctis, aut imminutis coarctari, aut dilatari debere orbitam. Idcirco iis tantum viribus perturbatricibus spectatis, quæ gravitatem Lunæ in Terram minuunt, manifestum est Lunarem orbitam paulo ampliorem fieri quando transversa diameter per Solem transit: quod rursus fuit a Newtono observatum. Valet idipsum de orbitis aliorum Planetarum. Et quidem in Jove cum excentricitas sit circiter $\frac{1}{38}$ distantiæ mediæ Saturni a Sole, erit vis $\frac{b}{2a^3}$ ad vim $\frac{9ben}{8a^3}$ quando maxima est, ut 152 : 9, & cum vis $\frac{b}{2a^3}$ ex Saturno orta sit ad gravitatem Jovis in Solem ut 0.0000918 : 3.6982249, erit gravitas ipsa ad vim maximam pendentem ex loco Saturni, & Apsidum Jovis ut 680397 : 1. Jam vero ob æqualem aream dato tempore semper descriptam tempora periodica sunt in ratione duplicata diametrorum, & diametri sunt reciproce ut vires. Itaque si eædem vires dumtaxat agerent, forent periodica Jovis tempora Saturno primum ex parte Aphelii, deinde circa Perihelium Jovialis orbitæ constituto in duplicata ratione 680398 : 680396, & tempus maximum foret ad differentiam maximi, & mi-

& minimi ut 170099 : 1 circiter : quod differentiam motus medii circiter 7" singulis Jovis revolutionibus exhiberet. Quare cum una Jovis revolutione e plaga Aphelii, aut Perihelii Saturnus sensibiliter recedat, satis exiguæ erunt motus medii æquationes, quæ ex aucta, aut imminuta Planetarum Primariorum gravitate in focum orientur. Quia vires omnes secundum tangentem orbitæ exercitæ continue agunt Planetam accelerando, aut retardando, quæ ex mutatione vis projectilis emergent æquationes potiores erunt. Acceleratio autem, aut retardatio non tantum ex viribus radio vectori perpendicularibus, sed ex viribus simul, & tempore æstimandæ erunt: quod in sequente capite præstabimus.

Ca-

Caput Secundum.

De acceleratione, & retardatione, quæ ex loco Planetæ attrahentis, & Apsidum Planetæ attracti pendet.

Lemma Secundum.

Si Mm, *fig.* 9., vocetur dz, erit $ct = \frac{dz}{b} \cdot \frac{bc^2}{b^2 \mp \varphi x} = \frac{c^2 dx}{b^2 \mp \varphi x}$, & Ct elementum rectæ CT erit $= \frac{\pm bc^2 \varphi dx}{(b^2 \mp \varphi x)^2}$, adeoque $Cc = \sqrt{\left(\frac{c^4 dz^2}{(b^2 \mp \varphi x)^2} + \frac{b^2 c^4 \varphi^2 dx^2}{(b^2 \mp \varphi x)^4}\right)} = \frac{c^2 dz}{b^2 \mp \varphi x} \sqrt{\left(1 + \frac{\varphi^2 y^2}{(b^2 \mp \varphi x)^2}\right)}$. Quare si negligantur plusquam quadraticæ excentricitatis φ potestates, & scribatur $b^2 - \varphi^2$ pro c^2, & $b^2 - x^2$ pro y^2, fiet elementum arcus elliptici $Cc = (1 \pm \frac{\varphi x}{b^2}) dz$.

Problema Quartum.

Dato loco Planetæ attrahentis determinare velocitatem, qua singulis Planetæ attracti revolutionibus projectionis velocitas augetur, aut imminuitur.

Resolutio.

Si de Planetis Primariis sermo sit, quia vis omnis perturbatrix præ gravitate in focum longe minor est quam in Luna, & errores singuli magis exigui sunt, negligi poterunt etiam quadraticæ potestates excentricitatis. Hoc dato in formula Problematis secundi, qua vis perpendicularis radio vectori exprimebatur, quatuor dumtaxat priores termini considerandi erunt, cæteris ob parvitatem evanescentibus. Quia vero vis accelerans ducta in elementum spatii æquatur ve-

velocitati ductæ in elementum suum; ductis iisdem terminis in $(1 \pm \frac{\varphi x}{b^2})\, dz$, primo omitti poterit factum priorum duorum in dz, quod cum per nullam excentricitatis potestatem multiplicetur exprimet accelerationem Planetæ in orbita circulari, in qua quidem vires perpendiculares in oppositis punctis æquales sunt, & contrariæ, totaque revolutione se mutuo destruunt. Negligi etiam poterit factum duorum posteriorum, in quibus excentricitas ipsa occurrit, per $\pm \frac{\varphi x dz}{b^2}$. Ita fiet

$$VdV = \frac{\pm \varphi x dz}{b^2} \left(\frac{\pm amx -+ any}{b\mathcal{P}^{\frac{3}{2}}} \frac{\mp mx +- ny}{ba^2} \right) - \frac{3a\varphi dz}{b\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}} (mx^2 \mp \pm nxy)$$

$$+ \frac{3a^2 \varphi dz}{b^3 \mathcal{P}^{\frac{5}{2}}} (\pm mnx^3 +- m^2 x^2 y -+ n^2 x^2 y \mp mnxy^2).$$

Ad hanc æquationem omnem evolvendam si primo denominator $\mathcal{P}^{\frac{3}{2}}$ de more in seriem convertatur, & in binomii formula statuatur exponens potestatis indeterminatæ $= \frac{3}{2}$, $a^2 + \frac{c^4}{b^2} = a^2 + b^2 = R$, $\frac{2ac^2}{b^2} \left(\frac{\mp nx -+ my}{a^2 + b^2} \right) = \frac{2a(\mp nx -+ my)}{R} = \mathcal{Q}$, fiet $\frac{1}{\mathcal{P}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}$

$$- \frac{3a(\mp nx -+ my)}{R^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{15a^2(\mp nx -+ my)^2}{2R^{\frac{7}{2}}}$$

$$- \frac{35a^3(\mp nx -+ my)^3}{2R^{\frac{9}{2}}}$$

$$+ \frac{315a^4(\mp nx -+ my)^4}{8R^{\frac{11}{2}}}$$

$$-\frac{693\, a^5 (\mp n x - + m y)^5}{8 R^{\frac{13}{2}}}$$
$$+\frac{3003\, a^6 (\mp n x - + m y)^6}{16 R^{\frac{15}{2}}} \text{ \&c.}$$

Quod si deinde fiat exponens $= \frac{5}{2}$, erit $\frac{1}{R^{\frac{5}{2}}}$ primus termi-nus seriei, in quam $\frac{1}{P^{\frac{5}{2}}}$ resolvitur. Potestates quantitatis indeterminatæ $(\mp n x - + m y)$ eædem erunt in secunda serie, quæ in prima, & dumtaxat constantes coefficientes mutabuntur, eritque secundi termini coefficiens $-\frac{5 a}{R^{\frac{7}{2}}}$, tertii $\frac{35 a^2}{2 R^{\frac{9}{2}}}$, quarti $-\frac{105 a^3}{2 R^{\frac{11}{2}}}$, quinti $\frac{1155 a^4}{8 R^{\frac{13}{2}}}$, sexti $-\frac{3003 a^5}{8 R^{\frac{15}{2}}}$ &c.

Substitutionibus hisce factis, neglectisque quantitatibus omnibus, quæ contrario signo se destruunt, fiet primus superioris æquationis terminus

$$= \frac{a \varphi m x^2 dz}{b^3 R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\varphi m x^2 dz}{b^3 a^2} + \frac{15 a^3 \varphi dz}{2 b^3 R^{\frac{7}{2}}} (m^3 x^2 y^2 - 2 m n^2 x^2 y^2 + m n^2 x^4)$$
$$+ \frac{315\, a^5 \varphi dz}{8 b^3 R^{\frac{11}{2}}} (m n^4 x^6 - 4 m n^4 x^4 y^2 + 6 m^5 n^2 x^4 y^2 - 4 m^3 n^2 x^2 y^4 + m^5 x^2 y^4)$$
$$+ \frac{3003\, a^7 \varphi dz}{16 b^3 R^{\frac{15}{2}}} (m n^6 x^8 + 15 n^4 m^3 x^6 y^2 + 15 n^2 m^5 x^4 y^4 + m^7 x^2 y^6)$$
$$- \frac{3003\, a^7 \varphi dz}{16 b^3 R^{\frac{15}{2}}} (6 m n^6 x^6 y^2 + 20 n^4 m^3 x^4 y^4 + 6 n^2 m^5 x^2 \;\; {}^6)$$

quorum omnium summa erit

$$= \frac{a \triangle \varphi m}{2 R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\triangle \varphi m}{2 a^2} + \frac{15 a^3 b^2 \triangle \varphi}{16 R^{\frac{7}{2}}} (m^3 + m n^2) \,.$$
$$+ \frac{315 a^5 b^4 \triangle \varphi}{128 R^{\frac{11}{2}}} (m n^4 + 2 m^3 n^2 + m^5)$$

$$+\frac{3003 a^7 b^6 \Delta \varphi}{2048 R^{\frac{15}{2}}}(5 m n^6 + 15 n^4 m^3 + 15 n^2 m^5 + 5 m^7).$$

Est vero $n^2 = 1 - m^2$. Quare hac rursus substitutione habita fiet eadem summa

$$= \frac{a \Delta \varphi m}{2 R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta \varphi m}{2 a^2} + \frac{15 a^3 b^2 \Delta \varphi m}{16 R^{\frac{7}{2}}} + \frac{315 a^5 b^4 \Delta \varphi m}{128 R^{\frac{11}{2}}} + \frac{15015 a^7 b^6 \Delta \varphi m}{2048 R^{\frac{15}{2}}}.$$

Secundus etiam ipsius æquationis terminus similibus substitutionibus prodibit

$$= -\frac{3 a \varphi m x^2 dz}{b R^{\frac{5}{2}}} - \frac{105 a^3 \varphi dz}{2 b R^{\frac{9}{2}}}(m n^2 x^4 - 2 m n^2 x^2 y^2 + m^3 x^2 y^2)$$

$$-\frac{3465 a^5 \varphi dz}{8 b R^{\frac{13}{2}}}(m n^4 x^6 - 4 m n^4 x^4 y^2 + 6 m^3 n^2 x^4 y^2 - 4 m^3 n^2 x^2 y^4 + m^5 x^2 y^4)$$

quorum pariter summa est $= -\frac{3 a b^2 \Delta \varphi m}{2 R^{\frac{5}{2}}} - \frac{105 a^3 b^4 \Delta \varphi}{16 R^{\frac{9}{2}}}(m n^2 + m^3)$

$$-\frac{3465 a^5 b^6 \Delta \varphi}{128 R^{\frac{13}{2}}}(m n^4 + 2 m^3 n^2 + m^5)$$

$$= -\frac{3 a b^2 \Delta \varphi m}{2 R^{\frac{5}{2}}} - \frac{105 a^3 b^4 \Delta \varphi m}{16 R^{\frac{9}{2}}} - \frac{3465 a^5 b^6 \Delta \varphi m}{128 R^{\frac{13}{2}}}$$

Postremus denique superioris aequationis terminus evadet

$$= \frac{15 a^3 \varphi dz}{b^3 R^{\frac{7}{2}}}(m n^2 x^4 - 2 m n^2 x^2 y^2 + m^3 x^2 y^2)$$

$$+ \frac{315 a^5 \varphi dz}{2 b^3 R^{\frac{11}{2}}}(m n^4 x^6 + 6 n^2 m^3 x^4 y^2 - 4 m n^4 x^4 y^2 - 4 m^3 n^2 x^2 y^4 + m^5 x^2 y^4)$$

$$+ \frac{9009 a^7 \varphi dz}{8 b^3 R^{\frac{15}{2}}}(m n^6 x^8 + 15 n^4 m^3 x^6 y^2 + 15 n^2 m^5 x^4 y^4 + m^7 x^2 y^6)$$

$$- \frac{9009 a^7 \varphi dz}{8 b^3 R^{\frac{15}{2}}}(6 m n^6 x^6 y^2 + 20 n^4 m^3 y^4 x^4 + 6 n^2 m^5 x^2 y^6)$$

& summa erit $= \frac{15 a^3 b^2 \Delta \varphi}{8 R^{\frac{7}{2}}}(m n^2 + m^3)$

+ 315

$$+\frac{315\,a^3 b^4 \Delta\varphi}{32\,R^{\frac{11}{2}}}(m\,n^4 + 2\,n^2 m^3 + m^5)$$

$$+\frac{9009\,a^7 b^6 \Delta\varphi}{1024\,R^{\frac{15}{2}}}(5\,m\,n^6 + 15\,n^4 m^3 + 15\,n^2 m^5 + 5\,m^7)$$

$$=\frac{15\,a^3 b^2 \Delta\varphi m}{8\,R^{\frac{7}{2}}} + \frac{315\,a^5 b^4 \Delta\varphi m}{32\,R^{\frac{11}{2}}} + \frac{45045\,a^7 b^6 \Delta\varphi m}{1024\,R^{\frac{15}{2}}}$$

Quare collectis simul terminis omnibus habebitur

$$V^2 = C + \frac{a\Delta\varphi m}{R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta\varphi m}{a^2} - \frac{3ab^2\Delta\varphi m}{R^{\frac{5}{2}}} + \frac{45a^3b^2\Delta\varphi m}{8\,R^{\frac{7}{2}}} - \frac{105a^3b^4\Delta\varphi m}{8\,R^{\frac{9}{2}}}$$

$$+\frac{1575\,a^5 b^4 \Delta\varphi m}{64\,R^{\frac{11}{2}}} - \frac{3465\,a^5 b^6 \Delta\varphi m}{64\,R^{\frac{13}{2}}} + \frac{105105\,a^7 b^6 \Delta\varphi m}{1024\,R^{\frac{15}{2}}}.$$

CASUS PRIMUS.

Si Planeta attrahens sit superior, denominator fractionum singularum ita in seriem converti debet, ut superioris Planetae distantia a foco denominatores novae seriei constituat. Tum enim series convergens erit, & primi tantum ipsius termini sumi poterunt. Accipiendi ex. gr. sint tantum priores tres, quorum scilicet denominatores sunt quarta, sexta, & octava potentia Planetae attrahentis, & fiat

$$\frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^3} - \frac{3\,b^2}{2\,a^5} + \frac{15\,b^4}{8\,a^7} - \frac{35\,b^6}{16\,a^9}$$

$$\frac{1}{R^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{a^5} - \frac{5\,b^2}{2\,a^7} + \frac{35\,b^4}{8\,a^9}$$

$$\frac{1}{R^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{a^7} - \frac{7\,b^2}{2\,a^9} + \frac{63\,b^4}{8\,a^{11}}$$

$$\frac{1}{R^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{a^9} - \frac{9\,b^2}{2\,a^{11}},\quad \frac{1}{R^{\frac{11}{2}}} = \frac{1}{a^{11}} - \frac{11\,b^2}{2\,a^{13}}$$

$$V^2 = C - \frac{3b^2\Delta\varphi m}{2a^4} + \frac{15b_4\Delta\varphi m}{8a^6} - \frac{35b^6\Delta\varphi m}{16a^8} - \frac{3b^2\Delta\varphi m}{a^4} + \frac{15b^4\Delta\varphi m}{2a^6} - \frac{105b^6\Delta\varphi m}{8a^8}$$
$$+ \frac{45b^2\Delta\varphi m}{8a^4} - \frac{315b^4\Delta\varphi m}{16a^6} + \frac{2835b^6\Delta\varphi m}{64a^8} - \frac{105b^4\Delta\varphi m}{8a^6} + \frac{945b^6\Delta\varphi m}{16a^8}$$
$$+ \frac{1575b^4\Delta\varphi m}{64a^6} - \frac{17325b^6\Delta\varphi m}{128a^8} - \frac{3465b^6\Delta\varphi m}{64a^8} + \frac{105105b^6\Delta\varphi m}{1024a^8}$$
$$V^2 = C + \frac{9b^2\Delta\varphi m}{8a^4} + \frac{75b^4\Delta\varphi m}{64a^6} + \frac{1225b^6\Delta\varphi m}{1024a^8}.$$

Eſt vero $\frac{M}{b}$ in duplicata ratione velocitatis mediae corporis in ellipſi ſeſe volventis, poſito quod maſſa Planetae in foco ellipſeos conſtituti ad maſſam Planetae alterius attrahentis ſe habeat ut $M : 1$. Quare ſi pro ipſa velocitate media ſcribatur 1, & differentiae totius dimidium accipiatur, fiet $\frac{b^3\Delta\varphi m}{16a^4 . M}(9 + \frac{75b^2}{8a^2} + \frac{1225b^4}{128a^4})$ velocitas media projectionis, quae inferiori Planetae revolutionibus ſingulis accedet. Quod erat primum.

Corollarium.

Inde colligitur projectionis velocitatem, quae ex vi perturbatrice oritur, nullam eſſe quando linea AT cum linea Apſidum Zz coincidit, maximam vero fieri quando duae lineae ad rectos angulos ſe interſecant. Patet autem quod ſi inferior Planeta moveatur ſecundum ordinem linearum $ZPzp$, & ſuperior Planeta ex plaga ZPz in quadratura Apſidum Zz reperiatur, propior erit Planetae ipſi inferiori ubi a ſumma Apſide ad conjunctionem tendet, quam cum inde ad Perihelium progredietur, adeoque magis in priore caſu accelerabit ipſius motum, quam in caſu altero retardare debeat. Igitur ſi ſinus m poſitivo ſigno accipiatur ex ea parte, in qua inferior Planeta tendit a ſumma ad imam Apſidem, exprimet $\frac{b^3\Delta\varphi m}{16a^4 . M}(9 + \frac{75b^2}{8a^2} + \frac{1225b^4}{128a^4})$ accelerationem totam: con-

contra vero $-\frac{b^3 \Delta \varphi m}{16 a^4 . M}(9 + \frac{75 b^2}{8 a^2} + \frac{1225 b^4}{128 a^4})$ exprimet totam retardationem ex alia parte orbitae, in qua ſinus m negative accipi debet, Planetamque inferiorem ſuperioris actione retardari manifeſtum eſt.

CASUS SECUNDUS.

Quod ſi Planeta attrahens ſit inferior, quantitas b in denominatores ſingulos rejicienda erit. Tum vero etiam facilius priores ſeriei totius termini ſupputari poterunt ſi fiat

$$\frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^3} - \frac{3 a^2}{2 b^5} + \frac{15 a^4}{8 b^7}$$

$$\frac{1}{R^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{b^5} - \frac{5 a^2}{2 b^7} + \frac{35 a^4}{8 b^9}$$

$$\frac{1}{R^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{b^7} - \frac{7 a^2}{2 b^9}$$

$$V^2 = C + \frac{a \Delta \varphi m}{b^3} - \frac{3 a^3 \Delta \varphi m}{2 b^5} + \frac{15 a^5 \Delta \varphi m}{8 b^7} - \frac{\Delta \varphi m}{a^2}$$
$$- \frac{3 a \Delta \varphi m}{b^3} + \frac{15 a^3 \Delta \varphi m}{2 b^5} - \frac{105 a^5 \Delta \varphi m}{8 b^7} + \frac{45 a^3 \Delta \varphi m}{8 b^5}$$
$$- \frac{315 a^5 \Delta \varphi m}{16 b^7} - \frac{105 a^3 \Delta \varphi m}{8 b^5} + \frac{945 a^5 \Delta \varphi m}{16 b^7}$$
$$+ \frac{1575 a^5 \Delta \varphi m}{64 b^7} - \frac{3465 a^5 \Delta \varphi m}{64 b^7}$$

$$V^2 = C - \frac{2 a \Delta \varphi m}{b^3} - \frac{\Delta \varphi m}{a^2} - \frac{3 a^3 \Delta \varphi m}{2 b^5} - \frac{45 a^5 \Delta \varphi m}{32 b^7}.$$

atque erit $-\frac{a \Delta \varphi m}{b^2 . M} - \frac{b \Delta \varphi m}{2 a^2 . M} - \frac{3 a^3 \Delta \varphi m}{4 b^4 . M} - \frac{45 a^5 \Delta \varphi m}{64 b^6 . M}$ velocitas, quae ſingulis revolutionibus accedet velocitati mediae Planetae ſuperioris. Quod erat alterum.

Co-

Corollarium Primum.

Rurſus igitur in hoc caſu, quoniam diſtantia Planetae attrahentis conſtituit numeratores fractionum ſingularum, minime evaneſcit terminus $\frac{\Delta \varphi m}{a^2}$. Quod ſi vero conſideretur actione omnium Planetarum parum admodum aberrare Solem a communi centro gravitatis totius ſyſtematis, aut ſi motus Planetae attracti ad immobile centrum virium referatur, cenſeri poterit nova velocitas projectionis, quae ſingulis ipſius revolutionibus reſpondet, $-\frac{a \Delta \varphi m}{b^2 . M}\left(1+\frac{3a^2}{4b^2}+\frac{45a^4}{64b^4}\right)$. In utraque autem hypotheſi velocitas eadem fiet maxima quando Planeta attrahens reperietur in quadraturis Apſidum orbitae ellipticae, & quando erit in linea Apſidum velocitas media Planetae alterius ſuperioris revolutionibus ſingulis non perturbabitur.

Corollarium Secundum.

Quia conſtat pariter Planetam ſuperiorem retardari ſi Planeta attrahens, & inferior circa primam quadraturam Apſidum orbitae ellipticae jaceat, & Planetae eidem ſuperiori a quadratura ad Perihelium progredienti ſit propior, quam cum ab Aphelio ad quadraturam proficiſcitur; ex ea parte poſitive accepto ſinu m, deſignabit
$-\frac{\Delta \varphi m}{M}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{2a^2}\right)-\frac{3a^3 \Delta \varphi m}{4b^4 M}\left(1+\frac{15a^2}{16b^2}\right)$ retardationem totam. Contra hac ipſa quantitate poſitive accepta exprimetur tota acceleratio Planetae ſuperioris inferiore ex adverſa parte orbitae conſtituto, ubi ſinus m negative accipi debet, & Planeta inferior ſuperiori a Perihelio ad ſecundam quadraturam tendenti propior eſt quam cum a ſecunda quadratura ad Aphelium ſuum revertitur.

Ca-

CASUS TERTIUS.

Si denique acceleratio Lunae, quae pendet ex vario Solis, & Apsidum aspectu, requiratur, omitti poterunt de more termini, quibus distantia Terrae, & Solis in denominatore posita superat tertiam dimensionem, sed quadraticae etiam excentricitatis potestates supputandae erunt. Tum vero si vis omnis, quae aequabilem arearum Lunae descriptionem perturbat, ut in *Coroll.* 1. *Probl.* 2. definita est, ducatur in $(1 \pm \frac{\phi x}{b^2})\, dz$, & negligantur termini, qui in oppositis punctis orbitae se mutuo destruunt, prodibit

$$V\,dV = \frac{3\phi^2 mn}{b^5\ a^3}(2x^4 - 2x^2y^2)\,dz$$

$$V^2 = C + \frac{6\phi^2 mn}{b^5\ a^3}\left(\frac{3}{4}b^5\,\Delta - \frac{1}{4}b^5\,\Delta\right) = C + \frac{3\Delta\phi^2 mn}{a^3}$$

& velocitas media Lunae, ad velocitatem totam se habebit in subduplicata ratione quantitatis $\frac{M}{b} : \frac{M}{b} + \frac{3\Delta\phi^2 mn}{a^3}$, sive quam proxime ut $\frac{M}{b} : \frac{M}{b} + \frac{3\Delta\phi^2 mn}{2a^3}$, ad velocitatem autem adjectam singulis revolutionibus se habebit ut $M : \frac{3b\Delta\phi^2 mn}{2a^3}$. Quod erat tertium.

COROLLARIUM PRIMUM.

Quia numerus revolutionum est reciproce ut tempus periodicum, & tempus periodicum reciproce ut motus medius, adeoque numerus revolutionum est motui medio directe proportionalis, si motus medii Lunae, Solis, & Apogaei sint L, S, A, erit $\frac{L}{S-A}$ numerus revolutionum a Luna absolutarum una Apogaei circa Terram revolutione, atque erit $\frac{3b\Delta\phi^2 mn}{2a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$ summa velocitatum, quae projectioni

Lu-

Lunae adjici possent, si toto eo tempore Apogaei respectu Solis positio maneret eadem. Erit etiam $\Delta : \frac{dn}{m}$ ut velocitatum omnium summa ad velocitatem illam, quae Lunae adjicietur quo tempore Apogaeum propius Soli accedet arcu quam minimo $\frac{dn}{m}$: quae propterea velocitas evadet $=$

$$\frac{3b\varphi^2 n\, dn}{2a^3} \cdot \frac{L}{S-A}.$$

Corollarium Secundum.

Quare variis Apogæi, Solisque aspectibus sese excipientibus summa velocitatum additarum quo tempore Apogaeum Soli accedit angulo, cujus sinus est n, fiet $= \frac{3b\varphi^2 n^2}{4a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$, proportionalis scilicet quadrato distantiae Apogæi ipsius a quadraturis Solis. Erit etiam velocitas minima in quadraturis Apogaei cum Sole ad velocitatem maximam in syzigiis ut $M : M + \frac{3b\varphi^2}{4a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$. Quare si bisecetur horum motuum differentia, motus Lunae tam variabilis quam uniformis juxta notum Machinii theorema exponi poterunt ope circuli, & ellipseos cujus axis major sit ad minorem in subduplicata ratione quantitatis $2M + \frac{3b\varphi^2}{4a^3} \cdot \frac{L}{S-A} : 2M - \frac{3b\varphi^2}{4a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$, sive directe ut $M + \frac{3b\varphi^2}{16a^3} \cdot \frac{L}{S-A} : M - \frac{3b\varphi^2}{16a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$.

Corollarium Tertium.

Et erit summa axium $2M$ ad differentiam $\frac{3b\varphi^2}{8a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$ ut radius ad sinum aequationis maximae, quae habebitur in octante. Est autem $L : S = 13\frac{1}{2} : 1$, $S : A = 9 : 1$, adeoque est $L ; S - A = 15\frac{1}{5} : 1$ quam proxime. Rursus est $\frac{M}{b^2} : \frac{b}{a^3} =$ 178725:

178725 : 1000, $\frac{\phi}{b} = 0 . 05505$, & $\frac{\phi^2}{b^2} = 0.0030305025$. Quare erit radius ad ſinum acquationis maximae ut 1000000 : 51, & cadem aequatio aucta in ratione revolutionis ſynodicae ad periodicam fiet circiter 12", & addi debebit motui medio Lunae in tranſitu Apogaei a Solis quadratura ad ſyzigiam, ſubtrahi vero in tranſitu a ſyzigia ad quadraturam.

S C H O L I O N.

Walmeslejus in *Prop.* 5. *Par.* 2. de inæqualitatibus motuum Lunarium aequationem medii motus inveſtigavit, quae ex varia Lunae gravitate in Terram pro vario Solis, & Apogaei aſpectu pendet. Ipſius methodus ex jam dictis facile percipitur. Nam ſi ſit K incrementum diametri tranſverſae Lunaris orbitae, quod ſola vi $\frac{b}{2a^3}$ integra Lunæ revolutione gigni poſſet, tota area ellipſeos erit ad ſectorem quam minimum $\frac{TC^2 . dz}{2TM}$, ſive ad $\left(\frac{c^4}{b^2} \pm \frac{2c^4 \phi x}{b^6} + \frac{3c^4 \phi^2 x^2}{b^8}\right) dz$ ut incrementum totum ad partem illam, qua minimo quovis tempore diameter tranſverſa ob eamdem vim augeretur. Tum erit vis $\frac{b}{2a^3}$ ad vim, quae prioribus terminis primae partis *Probl.* 3. definitur, ut mox inventum elementum ad elementum aliud, quo vere augebitur eodem tempore diameter tranſverſa. Quare collectis elementis omnibus, & poſito $b = 1$ fiet verum diametri incrementum $= 3 c^5 K (1 + \frac{3}{2} \phi^2 + 3 \phi^2 n^2) . \frac{L}{S - A}$, quod in quadraturis Apogaei evadet $= 3c^5 K . (1 + \frac{3}{2} \phi^2) . \frac{L}{S - A}$, in ſyzigiis vero $= 3 c^5 K . (1 + \frac{9}{2} \phi^2) . \frac{L}{S - A}$: adeoque ſi mediocris diameter ſit $= 2$, erit diameter maxima $= 2 + \frac{9}{2} c^5 \phi^2 K . \frac{L}{S - A}$, & diameter minima

L $= 2$

$= 2 - \frac{9}{2} c^5 \varphi^2 K . \frac{L}{S - A}$. Cum igitur in quavis orbis poſitione exceſſus diametri ſupra minimam ſit ſemper proportionalis quadrato ſinus diſtantiæ Apogæi a quadratura, & tempora periodica ſint quam proxime in duplicata ratione diametrorum, medii autem motus in ratione inverſa periodicorum temporum, motus Lunae, & variabilis, & uniformis exhiberi poterit ope circuli, & ellipſeos cujus axis major ſit ad minorem ut $1 + \frac{9}{4} c^5 \varphi^2 K . \frac{L}{S - A} : 1 - \frac{9}{4} c^5 \varphi^2 K . \frac{L}{S - A}$, & ſumma ad differentiam axium ſe habebit ut radius ad ſinum æquationis maximæ. Ita ſi quantitas K accipiatur ut ab eodem Walmeslejo definita eſt in *Prop.* 2. *Par.* 1. prodibit æquatio maxima 2′ 20″, eaque aucta in ratione revolutionis ſynodicæ ad periodicam fiet 2′ 31″. Si addatur æquatio alia 12″, quam ex velocitatis projectilis alteratione oriri diximus, fiet tota æquatio maxima in octantibus 2′ 43″. In ſcholio Lunaris theoriae minime indicavit Newtonus ſe æquationem hanc ex theoria gravitatis ſupputaſſe: ſed tantum ex Phænomenis 3′ 45″ prodire monuit. Cenſuit autem Walmeslejus aut ſufficientem obſervationum numerum Newtono defuiſſe, aut ob multiplices Lunaris motus inæqualitates non potuiſſe æquationem ipſam ab aliis rite diſtinguere.

Ca-

CAPUT TERTIUM.

De acceleratione, & retardatione, quae pendet ex loco Apsidum Planetae attracti, attrahentisque.

PROBLEMA QUINTUM.

SI ipse etiam Planeta attrahens circa eumdem focum describat ellipsim suam, invenire velocitatem mediam projectionis Planetae alterius, qui attrahitur.

RESOLUTIO.

Moveatur etiam Planeta attrahens in orbita elliptica GAB, *fig.* 11., & sit linea Apsidum BT, & cum linea Apsidum ZT prioris orbitae constituat angulum BTZ, cujus sinus sit p, cosinus vero q. Sit A Planetae attrahentis locus, & excentricitas orbitae HT sit $= \epsilon$. Tum centro T, & radio TL, qui semiaxi majori ellipseos HB sit aequalis describatur circulus TLK, & sit ipse semiaxis major $= r$, semiaxis minor $= l$, $TO = \pm u$, $LO = +-v$. His positis fiet primo in formulis problematum antecedentium $n = Cos.\, ATP = Cos.\, BTZ.\, Cos.\, LTO - Sin.\, BTZ.\, Sin.\, LTO = \frac{\pm qu -+ pv}{r}$, & $m = Sin.\, ATP = Sin.\, BTZ.\, Cos.\, LTO + Cos.\, BTZ.\, Sin.\, LTO = \frac{\pm pu +- qv}{r}$. Deinde erit $a = AT = \frac{rl^2}{r^2 \mp \epsilon u} = \frac{r^3}{r^2 \mp \epsilon u}$, si scilicet pro l^2 scribatur $r^2 - \epsilon^2$, & negligantur plusquam quadraticae excentricitatis potestates. Erit denique tota area ellipseos $= \frac{1}{2} r^2 \Delta$, & sector quam minimus $= \frac{AT^2 .\, dz}{2r} = \left(\frac{1}{2} r \pm \frac{\epsilon u}{r}\right) dz$, posito quod elementum descripti circuli sit dz.

CASUS PRIMUS.

Si Planeta attrahens fit fuperior, & manere intelligatur in loco A, juxta *caf.* 1. *Probl.* 4., erit tota projectionis velocitas, quae inferiori Planetae revolutionibus fingulis accedet

$$= \frac{9 b^3 \Delta \varphi}{16 r^{13} . M} (\pm pu + - qv)(r^2 \pm \bullet u)^4 + \frac{75 b^5 \Delta \varphi}{128 r^{19} . M} (\pm pu + - qv)(r^2 \mp \bullet u)^6$$

$$+ \frac{1225 b^7 \Delta \varphi}{2048 r^{25} . M} (\pm pu + - qv)(r^2 \mp \bullet u)^8 .$$

Porro velocitates mediae, quae dato quocumque tempore accedunt, quibus fcilicet uniformiter continuatis totum velocitatis projectilis augmentum revolutione integra habetur, funt tempori proportionales. Rursus periodica tempora inferioris Planctae, fuperiorifque funt inter fe in ratione fefquiplicata majorum axium $2b$, $2r$, ac tempus integrae revolutionis Planetae fuperioris eft ad tempus, quo arcum minimum defcribit, ut tota area ellipfeos ad fectorem quam minimum, five ut $\frac{1}{2} r^2 \Delta : \left(\frac{1}{2} r \pm \frac{\bullet . u}{r}\right) dz$. Quare dum fuperior Planeta arcum quam minimum ellipfeos fuæ defcribet, elementum velocitatis projectilis, quæ inferiori Planetæ accedet, definietur priore formula ducta in

$$\frac{r^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} r \pm \frac{\bullet u}{r}\right) dz}{b^{\frac{3}{2}} . \frac{1}{2} r^2 \Delta},$$

& æquationem ordinando, omittendo que terminos, qui ambiguo figno fe deftruunt, fiet elementum ipfum velocitatis

$$= \frac{9 b^{\frac{3}{2}} \varphi}{8 r^{\frac{13}{2}} . M} (p \bullet u^2 - 2 p \bullet u^2) dz + \frac{75 b^{\frac{7}{2}} \varphi}{64 r^{\frac{17}{2}} . M} (p \bullet u^2 - 3 p \bullet u^2) dz$$

+ 1225

$$+\frac{1225\, b^{\frac{11}{2}}\,\varphi}{1024\, r^{\frac{21}{2}}\,.\,M}(p\,\omega\,u^2 - 4p\,\omega\,u^2)\,dz$$

$$=-\frac{9\, b^{\frac{3}{2}}\, p\,\varphi\,\omega\,u^2\, dz}{8\, r^{\frac{13}{2}}\,.\,M}-\frac{75\, b^{\frac{7}{2}}\, p\,\varphi\,\omega\,u^2\, dz}{32\, r^{\frac{17}{2}}\,.\,M}-\frac{3675\, b^{\frac{11}{2}}\, p\,\omega\,\varphi\,u^2\, dz}{1024\, r^{\frac{21}{2}}\,.\,M}$$

& ſumma elementorum omnium, ſive tota projectionis velocitas, quam inferior Planeta revolutione integra ſuperioris Planetæ acquiret, fiet

$$=-\frac{3\, b^{\frac{3}{2}}\,\Delta\,\varphi\,\omega\,p}{16\, r^{\frac{7}{2}}\,.\,M}\left(3+\frac{25\, b^2}{4\, r^2}+\frac{1225\, b^4}{128\, r^4}\right).$$ Quod erat primum.

Corollarium Primum.

Ex ſerie totius calculi manifeſtum eſt eamdem adhuc prodire velocitatis adjectæ formulam ſi ii termini ſupputentur, in quibus occurrunt facta $\varphi\,\omega^2$. Deſtruunt enim ſeſe invicem ſignorum oppoſitione facta ipſa, & alii dumtaxat ſuperſunt termini, in quibus $\varphi\,\omega^3$ occurrit. Pariter ſi in *Problem.* 4. eorum terminorum ratio eſſet habita, quæ per φ^2 multiplicantur, ut ſunt $\frac{3b\,\Delta\,\varphi^2\, mn}{2a^3}$, $\frac{15\, b^3\,\Delta\,\varphi^2\, mn}{4a^5}$ &c; conſiderato poſtmodum ſuperioris Planetæ motu, adhuc termini iidem ſeſe deſtruerent, nec niſi alii ſupereſſent, qui involvunt alias poteſtates excentricitatis, fractioneſque longe minores, quam ut demum ſenſibiles æquationes mediorum motuum ſuppeditent. Unde licet primam tantum excentricitatis utriuſque orbitæ poteſtatem ſupputaverimus non minus tamen accurata velocitatis formula cenſeri debet.

Co-

Corollarium Secundum.

Ex ipsa autem formula colligitur quod si summæ Apsides duarum orbitarum aut conjungantur, aut opponantur inter se invicem, scilicet si aut ad idem cæli punctum e Sole referantur, aut ad puncta ex diametro opposita, Planeta inferior velocitatem mediam projectionis invariabiliter tuebitur in orbita elliptica non minus quam in circulari orbita tueretur. Si lineae Apsidum ad rectos angulos se interfecent velocitatis projectilis incrementum aut decrementum fiet maximum: & quidem in prima quadratura Apsidum, in ea scilicet duarum orbitarum positione, in qua juxta corollarium *cas.* 1. *probl.* 4. quantitas p positive accipitur, & Planeta inferior digressus e plaga summae Apsidis Planetae superioris tendit ad suam imam Apsidem, maxime retardabitur ipse Planeta inferior: contra vero maxime accelerabitur in opposita positione orbitarum, in qua quantitas p negative accipienda est.

Corollarium Tertium.

Erat vero juxta Hirei observationes saeculi hujus initio Apogaeum Saturni in signo Sagittarii 29° 14': Apogaeum Jovis in signo Librae 10° 17': Apogaeum Martis in signo Virginis 35': Apogaeum Terrae in signo Cancri 8° 7': Apogaeum Veneris in signo Aquarii 6° 56': Apogaeum Mercurii in signo Sagittarii 13° 13': scilicet positis orbitis, ut modo sunt, Aphelium Saturni circa prima quadraturam cum Aphelio Jovis reperitur, & pro Jove est circiter $p = 1$. Cum igitur motus Apsidum sit lentissimus, intelligitur facile elapsis saeculis velocitatem projectionis Jovis decrevisse semper Saturni actione, & saeculis subsequentibus rursus imminui oportere, nec nisi Apsidibus demum ad aspectus oppositos delatis rursus augeri posse.

Co-

Corollarium Quartum.

Pariter Aphelium Jovis eſt circa primam quadraturam cum Aphelio Terrae, a prima autem quadratura Aphelii Martis, & a ſecunda Veneris, & Mercurii diſtat circiter 40°, $26^\circ\frac{1}{2}$, 27°. Quare inferiorum Planetarum orbitis ad orbitam Jovis relatis fiet p pro Marte $= 0 . 64 = \frac{16}{25}$, pro Terra $= 1$, pro Venere & Mercurio $= -\frac{9}{10}$. Quod ſi vero orbita Terrae ad Martis orbitam referatur, & Mercurii orbita ad orbitam Veneris fiet $p = \frac{4}{5}$. Imminuetur igitur actione Jovis velocitas Terrae, & Martis, & velocitas Mercurii, & Veneris augebitur: actione autem Martis velocitas projectionis Terrae, & Mercurii velocitas actione Veneris imminuetur.

Corollarium Quintum.

Quia imminuta velocitate projectionis centro propius accedere debet Planeta, & corripi tempus periodicum, augerique motus medius, qui periodici temporis proportionem inverſam ſequitur: & contra velocitate projectionis aucta augeri etiam tempus periodicum, & motus medius imminui debet; praeſto eſt periodicum tempus Jovis Saturni actione, & actione Jovis periodica tempora Martis, & Terrae corripi. Imminuetur etiam actione Martis anni ſolaris quantitas, & periodicum tempus Veneris actione Jovis augebitur. Tempus periodicum Mercurii augebitur quidem actione Jovis, ſed actione Veneris imminuetur. Motis Planetarum Aphelis inter ſe, alia fiet projectionis velocitas, quae addetur, aut detrahetur, & contrariis orbitarum poſitionibus contrariae mediorum motuum viciſſitudines habebuntur, & inregra

gra Apheliorum revolutione ad priores dimensiones redibunt orbitae.

Casus Secundus.

Si Planeta attrahens sit inferior, & in formula secundi casus *probl.* 4. substitutiones eaedem fiant, erit nova projectionis velocitas, quae dato loco Planetae attrahentis singulis Planetae attracti revolutionibus respondebit

$$= -\frac{r^2 \wedge \varphi(\pm pu +- qv)}{b^2 M.(r^2 \mp \backsim u)} - b\frac{\Delta\varphi(\pm pu +- qv)(r^2 \mp \backsim u)^2}{2r^7 . M}$$

$$-\frac{3r^8 \Delta\varphi(\pm pu +- qv)}{4b^4 M.(r^2 \mp \backsim u)^3} - \frac{45 r^9 \Delta\varphi(\pm pu +- qv).}{64 b^6 M.(r^2 \mp \backsim u)^5}$$

Qua quidem formula ducta in $\frac{r^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2} r \pm \frac{\backsim u}{r}\right)}{b^{\frac{3}{2}} . \frac{1}{2} r^2 \Delta} dz$, & neglectis terminis omnibus signorum oppositione se destruentibus, fiet elementum velocitatis, quod elemento cuilibet periodici temporis Planetæ ipsius inferioris in orbita sua moti respondebit

$$= -\frac{3\varphi \backsim pu^2 dz}{r^{\frac{3}{2}} b^{\frac{7}{2}} M} - \frac{15 r^{\frac{1}{2}} \varphi \backsim pu^2 dz}{4 b^{\frac{11}{2}} M} - \frac{315 r^{\frac{5}{2}} \varphi \backsim pu^2 dz}{64 b^{\frac{15}{2}} M}$$

& summa elementorum omnium, seu totum incrementum, aut decrementum velocitatis erit pro singulis inferioris Planetæ revolutionibus

$$= -\frac{3 r^{\frac{3}{2}} \Delta \varphi \backsim p}{2 b^{\frac{7}{2}} M}\left(1 + \frac{5r^2}{4b^2} + \frac{105 r^4}{64 b^4}\right).$$ Quod erat alterum.

Corollarium Primum.

Si congruant igitur lineae Apsidum, & binae orbitae superioris Planetae, inferiorisque aut similiter, aut contrariae

riae ſint poſitae, ac fiat $p=0$, accelerationes omnes, & retardationes motus Planetae ſuperioris compenſabunt demum ſeſe invicem, & velocitas media projectionis actione inferioris Planetae minime turbabitur. Si ſit $p=\pm 1$, & lineae Apſidum conſiſtant ad rectos angulos, incrementum, aut decrementum velocitatis fiet maximum. Et quidem ſi quantitas p negativa ſit, hoc eſt ſi Aphelium Planetae inferioris juxta *Coroll.* 2. *Caſ.* 2. *Probl.* 4. ex parte illa jaceat, in qua ſuperior Planeta a Perihelio ad Aphelium ſuum progreditur, Planeta idem ſuperior ſecundum tangentem orbitae accelerabitur, & contra retardabitur orbitis contrarie poſitis.

Corollarium Secundum.

Quia igitur Aphelium Jovis integro circiter quadrante ſecundum ſignorum ordinem Saturni Aphelium ſubſequitur, & eſt $p=-1$, velocitas Saturni magis ſemper magiſque actione Jovis augebitur. Ob eamdem rationem cum in orbitis Terrae, & Martis ſit $p=-\frac{4}{5}$, & in orbitis Veneris, & Terrae $p=-0.47$, velocitas Martis actione Terrae, & velocitas Terrae actione Veneris continue augebitur. Id etiam ex *Coroll.* 3., & 4. prioris caſus deduci poterat. Vires enim ſuperioris Planetae, inferioriſque in oppoſitas partes diriguntur: unde ibi accelerari ſuperiorem Planetam neceſſe eſt, ubi inferioris motus ſecundum tangentem orbitae acceleratur, & vice verſa.

Corollarium Tertium.

Pariter quia motu projectionis aucto longius ſemper a centro recedere debet Planeta, ampliore mque orbitam, ac diuturnius tempus periodicum ſibi comparare; patet in ea orbitarum poſitione, quae modo eſt, tempus periodicum Saturni continue augeri actione Jovis, & motum medium imminui. Tempora etiam periodica Martis ob vim Terrae, &

M Ter-

Terrae ob vim Veneris augeri debent, & quantitas anni Tropici medii aut minor ſemper, aut major fiet prout vis Veneris aut minor, aut major erit actione Martis ſimul, & Jovis.

S C H O L I O N.

Si in formulis *Coroll.* 2. & 5. *Probl.* 3. libri hujus ſimiles ſubſtitutiones fiant, prodibit media vis centripeta Planetae cujuſcumque inferioris

$$= \frac{M}{b^2} - \frac{b}{2r^3} - \frac{9b\varpi^2}{4r^5} + \frac{\varphi^2}{4br^3} - \frac{9b^3}{16r^5} - \frac{375b\varphi^2}{32r^5} + \frac{9b\varphi\varpi q}{4r^5}.$$

Planetae autem ſuperioris media vis centripeta erit

$$= \frac{M+1}{b^2} + \frac{3r^2}{4b^4} + \frac{5\varphi^2}{4b^4} - \frac{15\varpi^2}{8b^4} + \frac{45r^4}{64b^6} + \frac{57r^2\varphi^2}{8b^6} - \frac{3\varphi\varpi q}{2b^4}.$$

Ex quarum formularum contemplatione manifeſtum fiet Apheliis duarum orbitarum conjunctis inter ſe, & poſito $q=1$, vim quidem illam maximam eſſe, hanc vero minimam, in quadraturis Apſidum utramque eſſe mediam mediarum omnium, & in oppoſitione demum vim priorem minimam, maximamque alteram evadere. Quare cum Aphelium Saturni Aphelio Jovis celerius moveatur in conſequentia, adeoque utriuſque orbitae Aphelia a conjunctione ad quadraturas, & oppoſitionem tendant, patet vires centripetas Jovis quidem imminui ſemper, Saturni autem augeri, atque hac de cauſſa periodicum tempus Saturni corripi, & tempus Jovis diuturnius fieri oportere. Ita gravior evaderet difficultas, quae ex periodicis hiſce temporibus eruitur, & prima fronte videri poſſet utriuſque Planetae motum minus etiam legibus attractionis mutuae reſpondere, cum praeter conſtans illud incrementum gravitatis mediae Saturni in Solem, & decrementum gravitatis Jovis, ex quo nullas orbitarum, & mediorum motuum viciſſitudines oriri diximus, quae continue, & ſucceſſu temporis majores fiant, aliud inſuper incrementum, & decrementum habeatur, quod magis ſemper magiſque creſcere neceſſe eſt. Verum quia maxima aequatio, vis cen-

centripetae, quae pendet ex vario aspectu Planetae attrahentis in orbita sua immobiliter positi, & Apsidum orbitae Planetae attracti, cujus adeo exiguos effectus esse in scholio *cap.* 1. libri hujus jam adnotavimus, ad aequationem maximam vis centripetae, quae pendet ex vario aspectu utriusque Aphelii, & positione duarum orbitarum, se habet in inferioribus quidem Planetis ut $\frac{9b^4}{8a^4} : \frac{9b^4\varpi}{4r^5}$, sive ut $r : 2\varpi$, in Planetis autem superioribus, qui actione inferiorum perturbantur ut $2r : \varpi$, nihil inde expectandum est, quod sensibile demum fiat. Insuper cum Aphelia Planetarum lentissime moveantur fixarum respectu in consequentia, & adhuc tardiorem motum habeant inter se, integris etiam saeculis eadem orbitarum inter se invicem positio censeri potest, eaedem mediae vires centripetae in focum, eaedemque orbitarum dimensiones, & periodica tempora, quae non nisi continue auctis, aut imminutis viribus ipsis centripetis continue imminui, aut augeri debent. Superest igitur ut ad calculum revocemus saeculares aequationes mediarum virium, quae secundum tangentem uniuscujusque orbitae exercentur, & quibus projectionis motus manente etiam positione orbitarum, acceleratur semper, aut retardatur, videamusque utrum inde profluant aequationes mediorum motuum, quae observationibus Astronomicis satisfaciant. Id subsequenti capiti argumentum suppeditabit.

M 2 CA-

Caput Quartum.

De motu medio Planetarum.

Lemma Tertium.

Data mutatione velocitatis invenire mutationem axis transversi ellipseos.

Moveatur Planeta in ellipsi ZCz, *fig.* 12., circa focum T, & sit CQ altitudo, per quam libere cadendo ea vi centripeta, quam in C habet velocitatem suæ projectionis acquireret. Si fiat $TQ:TC=TC:TR$, erit TR axi transverso Zz æqualis. Quod si in loco eodem C nova velocitas Planetæ accedat, quæ ad priorem projectionis velocitatem se habeat ut $V:1$, & præ ipsa satis sit parva, Cq vero sit altitudo, per quam tota velocitas cadendo acquiri posset, erunt spatia CQ, Cq in ratione duplicata velocitatum, sive erit $CQ:Qq=1:2V$ quam proxime. Denique si fiat $Tq:TC=TC:Tr$, erit etiam quam proxime $TQ:Qq=TR:Rr$, unde ob $TQ=\frac{TC^2}{TR}$, erit incrementum axis transversi $Rr=\frac{2V.TR.CQ}{TQ}=\frac{2V.TR}{TQ}.(TC-TQ)=\frac{2V.TR^2}{TC}-2V.TR=\frac{8V.b^2}{bc^2}(b^2\mp\varphi x)-4bV$, neglectoque ambiguo termino, & quadraticis excentricitatis potestatibus fiet $Rr=4bV$, & novus axis transversus $=2b+4bV$.

Corollarium.

Sunt vero periodica tempora inter se in ratione sesquiplicata majorum axium. Quare periodica tempora, quæ velocitatibus projectionis 1, & $1+V$ respondebunt, inter se erunt ut $(2b)^{\frac{3}{2}}:(2b)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(2b)^{\frac{1}{2}}.4bV=1:1+3V$, & perio-

riodicum tempus se habebit ad æquationem temporis, quæ ex aucta projectionis velocitate oritur ut $1 : 3V$.

PROBLEMA SEXTUM.

Data positione duarum orbitarum, & loco Apsidum invenire æquationem temporis periodici.

RESOLUTIO.

Casus Primus. Quia ob lentissimum motum Apsidum dato quocumque tempore data, & constans censeri potest positio duarum orbitarum Planetæ attracti, attrahentisque, revolutionibus singulis Planetæ superioris, juxta primam partem quinti problematis, ea velocitas inferiori Planetae adveniet, quæ ad velocitatem mediam projectionis se habebit ut $-\frac{3\, b^{\frac{3}{2}}\, \Delta\, \varphi \cdot p}{16\, r^{\frac{7}{2}}\,.\, M}\left(3+\frac{25\, b^2}{4\, r^2}+\frac{1225\, b^4}{128\, r^4}\right) : 1$. Quare juxta antecedens lemma, axis transversus $2\,b$ Planetæ inferioris abibit in $2\,b-\frac{3\, b^{\frac{5}{2}}\, \Delta\, \varphi \cdot p}{4\, r^{\frac{7}{2}}\,.\, M}\left(3+\frac{25\, b^2}{4\, r^2}+\frac{1225\, b^4}{128\, r^4}\right)$, & juxta corollarium lemmatis erit tempus periodicum inferioris ipsius Planetæ ad æquationem temporis habitam singulis superioris Planetæ revolutionibus ut $1 : -\frac{9\, b^{\frac{3}{2}}\, \Delta\, \varphi \cdot p}{16\, r^{\frac{7}{2}}\,.\, M}\left(3+\frac{25\, b^2}{4\, r^2}+\frac{1225\, b^4}{128\, r^4}\right)$. Quod erat primum.

Casus Secundus. Si superioris Planetæ motus ab inferiore perturbetur, erit juxta secundam partem quinti Problematis nova velocitas, quæ singulis inferioris Planetæ revolutionibus adveniet $= -\frac{3\, r^{\frac{3}{2}}\, \Delta\, \varphi \cdot p}{2\, b^{\frac{7}{2}}\,.\, M}\left(1+\frac{5\, r^2}{4\, b^2}+\frac{105\, r^4}{64\, b^4}\right)$, & juxta lemma tertium erit mutatio axis transversi orbitæ su-

ſuperioris Planetæ $= -\frac{6r^{\frac{3}{2}}\Delta\varphi\cdot p}{b^{\frac{5}{2}}M}\left(1+\frac{5r^2}{4b^2}+\frac{105r^4}{64b^4}\right)$, ac denique juxta lemmatis corollarium tempus periodicum Planetæ ipſius ſuperioris ſe habebit ad æquationem temporis ſingulis inferioris Planetæ revolutionibus ut

$1 : -\frac{9r^{\frac{3}{2}}\Delta\varphi\cdot p}{2b^{\frac{7}{2}}M}\left(1+\frac{5r^2}{4b^2}+\frac{105r^4}{64b^4}\right)$. Quod erat alterum.

Corollarium Primum.

Quod ſi numeri ſubſtituantur ſpeciebus, & inquiratur primum æquatio temporis periodici, aut motus medii Saturni, quæ ex Jove oritur, fiet juxta lemma 1. *lib.* 1. $M : 1 = 10000000 : 11121$, tum juxta *Coroll.* 2. *Caſ.* 2. *Probl.* 5. *lib.* hujus erit $p = -1$, & ſi diſtantiæ mediæ b, & r ſtatuantur 95, & 52, earumque radices 9.8, & 7.2, erit $\frac{\pi}{b} = \frac{5430}{95302} = \frac{2}{35}$, $\frac{\varphi}{b} = \frac{2505}{95302} = \frac{1}{38}$, $\Delta = \frac{44}{7}$, & tempus periodicum Saturni erit ad primum terminum æquationis, qua ſingulis revolutionibus Jovis augebitur, ut $2 . 95 . 98 . 10000000 : 9 . 52 . 72 . 11121 . \frac{44}{7} . \frac{1}{38} . \frac{2}{35}$ $= 21669025 . 10000000 : 370656 . 11121$.
Quare ſi pro tempore periodico ſubſtituatur motus medius Saturni 360°, ſive $1296000''$, fiet ſingulis Jovis revolutionibus æquatio, qua imminuetur motus medius Saturni $= \frac{5342196727296''}{216690250000}$, & integro ſæculo, ſive $8\frac{1}{3}$ Jovis revolutionibus evadet $= \frac{44518306060 8''}{2166902500} = 206''$ circiter.

Corollarium Secundum.

Primus vero ſeriei terminus ad ſecundum ſe habebit ut $4.9025 : 5.2704 = 361 : 135$, & fiet ſecundus terminus æquatio-

tionis motus medii imminuti $= 77''$. Secundus denique ſe habebit ad tertium ut $16.9025:21.2704=9025:3549$: fiet ſcilicet tertius terminus æquationis $= 30''$. Si alii termini eadem proportione cum binis poſterioribus decreſcerent, oporteret addere $12''$, $5''$, $2''$. Quia vero ſi bini poſteriores cum primo ſeriei termino comparentur tardius ſemper decreſcere videtur ſeries, cenſeri poterit ſæcularis æquatio motus medii $= 340''$, & ſingulis annis mille fieret circiter unius gradus. Major autem, eſſe poſſet æquatio ſi aut materiæ quantitas in quatuor Jovis ſatellitibus ad quantitatem materiæ, Jovis proportionem ſenſibilem haberet, aut in Sole minor, & in Jove major materiæ quantitas haberetur quam ſupra ſtatutum ſit.

Corollarium Tertium.

Ope earumdem ſubſtitutionum, & poſito $p = 1$ juxta *Coroll.* 3. *caſ.* 1. *Probl.* 1. fiet periodicum tempus Jovis ad primum terminum æquationis, qua tempus ipſum periodicum ſingulis Saturni revolutionibus imminuitur ut

$$16.95.98.10000000:9.3029.52.72.\frac{44}{7}.\frac{1}{38}.\frac{6}{35}$$

$$=95.490000000:3029.26.18.\frac{11}{133}.\frac{27}{35}$$

$$=216690250000000:62373168.$$

Unde fiet ſingulis Saturni revolutionibus primus terminus æquationis, qua augetur motus medius Jovis $=\frac{3273842841984'''}{21668025000} = 151'''$: & cum Saturnus revolutionem ſuam abſolvat annis $29\frac{1}{2}$ circiter, evadet integro ſæculo $= 512'''$.

Corollarium Quartum.

Erit autem primus ſeriei terminus ad ſecundum ut $12.9025:25.2706=1083:676$, & ſecundus ad tertium ut $32.9025:49.2704=288800:132496$. Quare prodibit ſecundus

dus terminus $= 319'''$, & tertius $= 147'''$, & terminis paulo celerius decrescentibus censeri poterit rotundo numero sæcularis æquatio aucti motus medii Jovis $= 20''$. Si quantitas materiæ in quinque Saturni Satellitibus æqualis esset quantitati materiæ Saturni ipsius, evaderet tota æquatio sæcularis $= 40''$: & si Saturni massa non 3029, sed 4150 cum Newtono statuenda esset, fieret $= 55''$: & si denique 3250 cum Gravesandio statueretur, fieret $= 43''$, & medium accipiendo censeri posset dimidio fere minuto secundo annis singulis motum medium Jovis augeri.

Corollarium Quintum.

Ut definiamus æquationem, qua motus medius Martis juxta *Coroll.* 4., & 5. *caf.* 1. *Prob.* 5. singulis Jovis revolutionibus augeri debet, statuamus distantias medias 52, & 15, earumque radices 7 . 2, & 3 . 9, atque insuper $p = \frac{16}{25}$, $\frac{\varphi}{b} = \frac{1415}{51980} = \frac{3}{110}$, $\frac{\varpi}{b} = \frac{2505}{51980} = \frac{1}{21}$. Erit motus medius Martis ad primum æquationis quæsitæ terminum ut

$$16 . 52 . 720000000 : 9 . 11121 . 15 . 39 . \frac{3}{110} . \frac{3}{21} . \frac{44}{7} . \frac{16}{25}$$

$$= 800000000 : 9 . 11121 . \frac{3}{49} . \frac{1}{5}$$

$$= 196000000000 : 300267.$$

Quare fiet singulis sæculis idem terminus $= 16\frac{1}{2}''$: qui cum ad secundum se habeat ut $12 . 2704 : 25 . 225 = 10816 : 1875$, fiet secundus terminus $3''$, & serie celerrime convergente censeri poterit rotundo numero $= 20''$ tota sæcularis æquatio, qua motus medius Martis actione Jovis augetur.

Corollarium Sextum.

At vero actione Terræ per *Coroll.* 2. & 3. *caf.* 2. *Probl.* 5. tempus periodicum Martis augeri debet, & motus medius imminui, & si fiant distantiæ mediæ 15, & 10, earumque ra-

radices 3.9, & 3.2, $p = -\frac{4}{5}$, $\frac{\bullet}{b} = \frac{168}{15203} = \frac{2}{181}$, $\frac{\bullet}{b} = \frac{1415}{15203} = \frac{1}{11}$, posita Terræ massa $= 0.06$, erit motus medius Martis ad primum terminum æquationis, qua singulis annis augetur actione Terræ ut

$$15.39.1000000 : 9.6.10.32.\frac{1}{181}.\frac{1}{11}.\frac{44}{7}.\frac{4}{5}$$

$$= 25.81250 : \frac{3.64}{1267}.$$

Quare fiet integro sæculo idem terminus $= 10''$: qui cum ad secundum se habeat ut $4.225 : 500 = 9 : 5$, & secundus ad tertium ut $16.225 : 2100 = 16 : 21$, fiet secundus terminus $= 5\frac{1}{2}''$, tertius $= 3''$, & compositis simul Jovis, & Terræ viribus nulla orietur periodici motus Martis æquatio, quæ demum observationibus possit detegi.

COROLLARIUM SEPTIMUM.

Quod si æquatio anni Tropici, quæ ex Jove oritur requiratur, erit $\frac{\bullet}{b} = \frac{168}{51980} = \frac{1}{313}$, $\frac{\bullet}{b} = \frac{2505}{51980} = \frac{1}{21}$, $p = 1$, & tempus periodicum Terræ se habebit ad primum terminum æquationis, qua singulis Jovis revolutionibus corripitur ut

$$16.52.720000000 : 9.11121.10.32.\frac{1}{21}.\frac{3}{313}.\frac{44}{7}$$

$$= 26.18000000 : 100089.\frac{1}{21}.\frac{33}{2191}$$

$$= 21533148000000 : 3302937.$$

Quare cum annus Tropicus sit dierum 365, horarum 5, $48'$ $40''$, sive $31556920''$, fiet singulis Jovis revolutionibus æquatio anni tropici $= \frac{104230518674\,04''}{215331480000000}$, & integro sæculo $= \frac{868587655617''}{21533148000} = 40''$. Quia vero primus æquationis terminus ad secundum se habet ut $12.2704 : 2500$, erit secundus ter-

minus $= 3''$, & ſerie celerrime convergente cenſeri poterit tota ſæcularis æquatio $= 43''$ temporis.

Corollarium Octavum.

Quia ſoliditas Terræ ad Martis ſoliditatem ſe habet ut $100:65$, ſi Mars ejuſdem eſſet denſitatis cum Terra, poſita Solis maſſa 1000000, foret materiæ quantitas in Marte $\frac{39}{10}$, & periodicum tempus Terræ ſe haberet ad primum terminum æquationis, qua ſingulis ipſius Martis revolutionibus minuitur ut

$$16 . 15 . 39000000 : 9 . \frac{39}{10} . 10 . 32 . \frac{1}{11} . \frac{6}{181} . \frac{44}{7} . \frac{4}{5}$$

$$= 5000000 : \frac{9}{7} . \frac{16}{181} . \frac{4}{5}$$

& fieret integro ſæculo, ſeu 50 Martis revolutionibus primus æquationis quæſitæ terminus $= \frac{113604912''}{3959375} = 29''$. Si denſitas Planetarum recedendo a Sole decreſceret juxta illam Euleri regulam in ratione ſubduplicata temporum periodicorum, terminum ipſum minuendo in ratione $\sqrt{2} : 1$, fiet $= 19\frac{1}{3}''$. Ad ſecundum autem ſe habet ut $27:25$, & ſecundus ad tertium ut $72:49$. Quare fiet ſecundus terminus $= 18''$, tertius $= 12''$, & terminis celerius ſemper decreſcentibus cenſeri poterit tota ſæcularis æquatio $= 55''$.

Corollarium Nonum.

Si Venus ejuſdem maſſæ ſtatuatur cum Terra noſtra, ſicuti ejuſdem ſoliditatis eſt, & fiat $p = -\frac{47}{100}$, $\frac{\varphi}{b} = \frac{168}{10000} = \frac{1}{60}$, $\frac{\pi}{b} = \frac{52}{10000} = \frac{1}{192}$, poſitis diſtantiis mediis 10, & 7, earumque radicibus 3.2, & 2.7, fiet una Veneris revolutione periodicum tempus Terræ ad primam partem æquationis, qua actione Veneris augetur, ut

320000000:

$320000000 : 9 . 7 . 27 . 6 . \frac{1}{60} . \frac{1}{192} . \frac{44}{7} . \frac{47}{100} . \frac{1}{2}$
& integro ſæculo, ſive revolutionibus Veneris 160, evadet $= 22''$. Si juxta eamdem regulam augeatur pariter æquatio in ratione ſubduplicata periodicorum temporum Terræ, & Veneris ſive in ratione $\sqrt{12}$, $\sqrt{7\frac{1}{2}} = \sqrt{8} : \sqrt{5} = 14 : 11$, fiet $= 27\frac{1}{2}''$. Jam vero primus terminus æquationis ad ſecundum ſe habet ut $400 : 245$, & ſecundus ad tertium ut $1600 : 1029$. Erit igitur ſecundus terminus $= 16\frac{1}{2}''$ tertius $= 10\frac{1}{2}''$, & tota ſimul æquatio, qua actione Veneris periodicum tempus Terræ ſingulis ſæculis augetur, cenſeri poterit $= 65''$.

COROLLARIUM DECIMUM.

Quod ſi orbita Veneris ad Jovis orbitam referatur, & fiat $p = -\frac{9}{10}$, $\frac{\phi}{b} = \frac{52}{51980} = \frac{1}{1000}$, $\frac{\psi}{b} = \frac{1}{21}$ erit ſingulis Jovis revolutionibus motus medius Veneris ad æquationem ex Jovis actione ortam ut

$16 . 52 . 720000000 : 9 . 11121 . 7 . 27 . \frac{1}{21000} . \frac{44}{7} . \frac{27}{10}$
$= 21434000000000000 : 89179299$.
Pariter quia Aphelium Veneris a Terræ Perihelio diſtat circiter $28°$, cujus ſinus eſt $= 0 . 47$, erit motus medius ad æquationem, quæ annis ſingulis ex Terra orietur, ut

$16 . 320000000 : 9 . 6 . 7 . 27 . \frac{1}{60} . \frac{1}{192} . \frac{44}{7} . \frac{47}{100} . 3$
$= 81920000000000 : 125631$.
Unde intelligitur neque ex Jove, neque ex Terra motum medium Veneris ſenſibiliter integro etiam ſæculo perturbari.

COROLLARIUM UNDECIMUM.

Denique ſi orbitam Mercurii ad Jovis orbitam referamus, ſtatuamuſque $p = -\frac{9}{10}$, $\frac{\varphi}{b} = \frac{810}{51980} = \frac{1}{64}$, manentibus cæteris ut ſupra, erit motus medius Mercurii ad æquationem, qua ſingulis Jovis revolutionibus imminuetur, ut

$$16 . 52 . 720000000 : 9 . 11121 . 3 . 17 . \frac{1}{64} . \frac{1}{21} . \frac{44}{7} . \frac{27}{10}$$

$$= 4 . 52 . 800000000 : 10089 . \frac{17}{64} . \frac{3}{7} . \frac{11}{7}$$

$$= 521830400000000 : 66149929$$

& fiet una Jovis revolutione æquatio medii Mercurii motus immiuuti $= \frac{8573030798\,4''}{521830400000}$ & integro ſæculo $= \frac{714419233\,2''}{5218304000}$ $= 1\frac{1}{3}''$. Actio Terræ in Mercurium integro etiam ſæculo nullam gignet ſenſibilem medii motus æquationem.

COROLLARIUM DUODECIMUM.

Actio autem Veneris ſenſibiliter motum medium Mercurii augebit. Et quidem ſi fiat $p = \frac{4}{5}$, $\frac{\varphi}{b} = \frac{810}{7233} = \frac{1}{9}$, $\frac{\phi}{b} = \frac{52}{7233} = \frac{1}{139}$, & Venus ejuſdem maſſæ, denſitatiſque ſtatuatur cum Terra noſtra, erit ſingulis ipſius revolutionibus motus medius Mercurii ad primum terminum æquationis, qua augetur, ut

$$16 . 7 . 27000000 : 9 . 6 . 3 . 17 . \frac{1}{139} . \frac{1}{9} . \frac{44}{7} . \frac{12}{5}$$

$$= 16957500000 : 187$$

& fiet una Veneris revolutione idem terminus $= \frac{242352''}{16957500}$, & revolutionibus Veneris 160, ſive integro ſæculo $= \frac{3877632''}{1695750}$

$= 2$

$= 2\frac{1''}{4}$, & si eodem modo augeatur in ratione $\sqrt{365} : \sqrt{224} = 19 : 15$, evadet $= 2\frac{11''}{15}$. Primus vero æquationis terminus ad secundum se habebit ut $196 : 75$, adeoque erit secundus terminus $= 1''$. Itaque, censeri poterit medium Mercurii motum, actione Veneris $4''$ singulis sæculis augeri.

SCHOLION.

Quod si jam demum theoriam cum observationibus conferre licet, Keplerus ab anno usque 1625 imminutam Saturni celeritatem, & Jovis celeritatem angularem circa Solem auctam fuisse agnovit. Flamsteedius cum anno 1683 in Transactionibus Philosophicis de conjunctione Jovis, & Saturni ageret animadvertit hujus Planetæ motum medium justo quidem celeriorem in tabulis constitui, illius vero tardiorem. In Monumentis Regiæ Parisiensis Academiæ anno 1718 de correpto periodico Jovis tempore plura recensuit Maraldus, quæ huc redeunt. Comparando conjunctionem Jovis cum Asino Australi, quæ 240 annis ante Christum observata est, cum alia conjunctione a Maraldo observata Decembri mense anno 1717, prodit singulis annis 83 Jovis acceleratio supra septem revolutiones $4'\ 16''$. Comparando conjunctionem cordis Leonis observatam Athenis anno 508 cum observationibus a Walthero habitis anno 1503, prodit acceleratio media eodem tempore $2'\ 26''$: eamdem vero conjunctionem illam comparando cum conjunctione stellæ Geminorum juxta Waltherum octavæ, & juxta Bouillaud duodecimæ, quæ conjunctio observata est anno 1504, prodit acceleratio $3'\ 8''$. Accelerationum hujusmodi, quæ ex collatione observationum veterum, ac recentiorum prodeunt, adeo parvam differentiam Maraldus partim tribuendam censuit errori veterum, qui nondum filis in foco ocularis, & objectivæ lentis Telescopii positis utebantur pro accurate determinando conjunctionis tempore, partim etiam incertæ methodo reducendi motus medios ad veros. Jam vero longe major accelera-

tio

tio eruitur recentioribus observationibus collatis inter se invicem. Comparando conjunctionem Jovis cum stella Regulo, quam observavit Bouillaud die 12 Octobris anno 1623 cum simili conjunctione mensis Octobris anni 1706, prodit singulis annis 83 acceleratio media Jovis supra septem revolutiones 21'. Comparando conjunctionem Jovis cum stella frontis Scorpii in Batavia ab Hortensio observatam anno 1627, & ab Elia a Leonibus in Germania, cum simili conjunctione Jovis observata anno 1710, prodit acceleratio 12' 50". Comparando observationes a Gassendo habitas anno 1633 mense Decembri cum aliis observationibus anni 1716, prodit acceleratio 15'. Comparando denique locum Jovis anno 1634 die 12 Aprilis a Gassendo observatum Dinii cum loco alio, quem Maraldus anno 1717 in Parisiensi observatorio determinaverat, rursus prodit acceleratio 15'.

Quæ vero ad retardatum motum Saturni pertinent a Monnierio in suis Astronomicis Institutionibus simul congesta sunt. Comparando observationes Hevelii anni 1672 cum aliis anno 1731 habitis, motus medius Saturni singulis annis Julianis 59, & uno die prodit duarum revolutionum 1° 44' 50". Kepleri, & Streetii tabulæ eodem tempore motum medium Saturni $7\frac{1}{2}'$ celeriorem statuunt. Observationes annorum 1686, & 1745 inter se comparatæ, annis Julianis 59, & uno die exhibent motum medium duarum revolutionum, & 1° 39' 2": scilicet 6' breviorem, quam ex prioribus observationibus prodierit. Considerandum est autem observationum priorum tempore Saturno fere oppositum fuisse Jovem, anno 1686 distasse a se invicem duos Planetas $47\frac{1}{2}°$, & 40° anno 1745: quod plane indicat inæqualitatem Saturni aliam sæcularem esse, aliam quæ pendet ex vario aspectu Jovis. Anno 1686 error tabularum erat 21' 9", & 36' 12" anno 1745. Anno 1716 duobus jam dictis intermedio cum error 28' esse debuisset, 36' inventus est. Cui porro caussæ, ut notat Cl. Alembertius *par.* 2. disquisitionum de Mundi systemate *num.* 245, discrimen 8' tribuendum est nisi Jovi,

qui

qui anno 1716 tribus signis a Saturno distabat, dimidio scilicet signo magis quam aliis duobus annis? Et plane comparando observationes eodem aspectu habitas evanescit hæc inæqualitas, & est error annorum numero proportionalis. Anno 1598 erat error tabularum 2', $20\frac{1}{2}'$ anno 1657, & $36\frac{1}{3}'$ anno 1736. Anno 1583 tempore conjunctionis Jovis, & Saturni error tabularum defectu erat 3' 10", anno 1642 erat $7\frac{1}{3}'$ excessu, & anno 1702 erat $16\frac{1}{3}'$ excessu pariter: Planetis in tribus casibus eamdem fere configurationem retinentibus. Quo patet ab anno 1583 tabularum Saturni errorem esse 10' singulis annis 59, & bis mille annis, quod est tempus vetustissimæ observationis a Ptolemæo recensitæ usque ad 6° assurgere: quæ plane quantitas major est, quam ut in veterum Astronomorum incuriam, & indiligentiam potius quam in Physicam Saturni retardationem refundi possit. Fuit enim illa observatio conjunctionis Saturni cum stella γ humeri Australis Virginis, quæ 6° vere a Saturno distare non poterat quando conjuncta primis Astronomis videbatur.

Hireus in tabulis Astronomicis statuit motum medium Saturni dumtaxat 6" annis singulis, & 1° 40' imminui tempore annorum mille. Hoc dato suas, Tychonicasque observationes conciliavit inter se invicem: veteres autem illas, quæ 2°, aut 3° a suis dissentiebant, veluti indiligentes, ac dubias penitus dereliquit. Hallejus omnibus perpensis censuit motum medium Jovis augeri 57', & motum medium Saturni 2° 19' imminui singulis annis mille, æquationesque esse semper ut quadrata temporum. Cassinus denique in Monumentis Parisiensibus anni 1746 voluit annis singulis 30''' augeri motum medium Jovis, & 11" imminui motum medium Saturni: scilicet æquationes esse 8' 20", & 3° 3' 20" annis mille. Jam vero juxta gravitatis theoriam, & *Coroll.* 3., & 4. non computata Satellitum actione prodiret incrementum medii motus Jovis, pro varia densitatis Saturni hypothesi, 200", aut 270": & si quinque simul Satellites eamdem quanti-

tita-

titatem materiæ cum Saturno ipso complecterentur, quod non adeo a ratione alienum videri posset, ea prodiret æquatio quæ cum Cassini sententia conveniret. Motus autem medius Saturni non nisi uno gradu singulis annis mille imminueretur. Id etiam aliis calculis ex theoria gravitatis eruit Cl. Alembertius, qui *num.* 239, de Mundi systemate 100" æquationem eamdem singulis Saturni revolutionibus esse comperit. Dimidio augeri posset æquatio si quantitas materiæ in quatuor Jovis Satellitibus foret illius dimidia, quæ in Jove est: quod tamen minus recte assumeretur cum massa Jovis quadruplo fere massam Saturni excedat. Itaque aut non satis adhuc comperta censeri debent elementa theoriæ Jovis, & Saturni, aut si demum Astronomorum industria æquationes mediorum motuum Saturni, & Jovis accurate determinentur, & multo majores prodeant, quam ferant superiores calculi, extra Planetarium systema totius inæqualitatis caussa quærenda erit, videndumque utrum Jupiter, & Saturnus cum motus Cometarum perturbent sensibiliter, vicissim etiam a Cometis sensibiliter in suis motibus perturbentur.

Motus medii Martis, & Veneris juxta leges gravitatis satis constantes, ac regulares sint oportet. Etenim juxta *Coroll.* 5. & 6. medius motus Martis iisdem fere æquationibus augebitur singulis sæculis actione Jovis, & actione Terræ imminuetur: & juxta *Coroll.* 10. actio Jovis, & Terræ nullam gignet sensibilem medii motus Veneris æquationem. Id etiam observationibus Astronomicis conforme est. Equidem Hireus in tabulis animadvertit epocham motum mediorum Veneris a Keplero $13\frac{1'}{4}$ plus justo promotam esse: minime vero determinavit utrum differentia adeo exigua retardationi motus Veneris potius quam incertitudini veterum observationum a Keplero inter se collatarum tribuenda sit. Alii Astronomi inferiores Planetas præ superioribus magis regulares esse in suis motibus observarunt, sicuti priores Jovis, & Saturni Satellites magis regulares sunt quam Satellites alii remotiores. Hallejus in tabulis cum æquationes sæculares Saturni, Jovis, & Mercurii supputasset, nullam

Mar-

Martis, & Veneris sæcularem æquationem exhibuit. Et quidem tabularum Halleji, observationumque differentia in oppositionibus Solis, & Martis semel tantum ad 1' 6'' usque ascendit, in ea scilicet, quæ die prima mensis Decembris anno 1659 contigit. In 29 sequentibus oppositionibus error omnis uno minuto semper major est, & quandoque aliquot tantum secundorum.

Ad Solarem annum quod pertinet, Hallejus inæqualitatem aliquam motuum mediorum Solis jam indicavit anno 1693 in notis ad observationes Albategnii, quæ *num.* 204. Transactionum Philosophicarum insertæ sunt. Alii vero sic annum Tropicum medium definiunt. Ricciolius *lib.* 1. Astronomiæ *cap.* 4. ex vetustissimis Hipparchi observationibus juxta refractionis leges correctis, & tempore Æquinoctii anno 1655 Bononiæ a se observati eruit Solarem annum 365 dierum, 5 horarum, 48' 48''. Tycho, Keplerus, Flamsteedius, & Newtonus scrupulis aliquot secundis annum Solarem longiorem statuunt. Si cum aliis recentioribus observationibus quæ a Walthero institutæ sunt decimo quinto sæculo exeunte comparentur, prodit Solaris annus 365 dierum, 5 horarum 48' 46 $\frac{1}{2}$''. Cassinus cum in tabulis Astronomicis posuisset annum 365 dierum, 5 horarum 48' 52'', ex pluribus tamen Æquinoctiis, quæ Vraniburgi, Bononiæ, & Lutetiæ Parisiorum determinaverat, annum Solarem statuit medium inter $365^d\ 5^h\ 48'\ 47''$, & $365^d\ 5^h\ 48'\ 35''$, sive esse proxime $365^d\ 5^h\ 48'\ 41''$: quam quidem anni definitionem tanto accuratiorem existimat Caillius quanto in tribus iis locis certius innotescit Poli altitudo, ex qua Æquinoctii, & Solaris anni determinatio pendet maxime. Ipse autem Caillius in Monumentis Academiæ anni 1750 cum quatuor observationes a se institutas cum alia observatione die 1 Aprilis anni 1669 a Picarto habita comparasset, Solarem annum determinavit $365^d\ 5^h\ 48'\ 30''$, breviorem scilicet 27 $\frac{1}{2}$'', quam Newtonus, & Flamsteedius statuerant. Deinde cum easdem suas observationes comparasset cum alia a Picarto instituta die 5 Aprilis anno 1681, Solaris

anni quantitatem eruit $365^d\ 5^h\ 48'\ 50\frac{5}{2}''$, & medium accipiendo censuit $365^d\ 5^h\ 48'\ 40''$. Animadvertit etiam quod si ex errore observationum differentia omnis profluxisset, plus quam minuto uno ac dimidio in singulis observationibus, quæ ad se invicem referebantur, peccatum esset, & $39'\ 25''$ in intervallo temporis ipsis observationibus interjecti. In Lectionibus Astronomicis Caillius ipse, comparatione observationum, a se quidem anno 1749, & anno 1657 a Cassino die 28 Martii institutarum Solarem annum determinavit $365^d\ 5^h\ 48'\ 43''$. Quare observationibus omnibus satis conforme videri potest, quod Eulerus in suis opusculis censuit, Solarem annum $5''$ temporis singulis sæculis corripi.

Jam vero si quantitatem materiæ in Sole, Jove, & Terra statuamus 10000, 11. 121, 0.06, intelligamusque densitates Veneris, Terræ, & Martis inter se esse in subduplicata ratione periodicorum temporum reciproce, corripietur $43''$, & $55''$ actione Jovis, & Martis anni Solaris quantitas, & $65''$ actione Veneris singulis sæculis augebitur, juxta *Coroll.* 7., 8., & 9. Si densitatem Veneris $\frac{1}{3}$ majorem esse intelligamus æquatio evadet $87''$, unde densitate Martis paulo imminuta illud Solaris anni decrementum habebimus, quod cum observationibus conveniet. Hac etiam posita hypothesi fiet sæcularis æquatio medii motus Mercurii, quæ ex Venere oritur $5\frac{1}{3}''$. Quare subducta æquatione, quæ ex Jovis actione pendet, supererunt $4''$ pro totali incremento medii Mercurii motus. Hallejus cum anno 1723 Mercurii per Solem transitum Grenovicii accuratissime observasset, suasque & alias aliorum Astronomorum observationes summa diligentia comparasset inter se invicem, censuit quantitati medii motus Mercurii $20''$ addenda esse singulis annis centum. At Eustachius Manfredius cum ejusdem congressus observationes Bononiæ a se institutas comparasset cum aliis, quæ occasione alterius congressus Lutetiæ Parisiorum anno 1631 a Gassendo habitæ fuerant, invenit motum medium Mercurii non nisi

qua-

quatuor, aut quinque ſecundis in anno communi adeoque ſingulis ipſius Mercurii revolutionibus non niſi $1''$ circiter majorem eſſe nunc temporis quam in Rudolphinis, Riccio-lianis, & Hireanis tabulis ſtatuebatur. Vide Comment. Bonon. Scient. Academiæ *to. 2. par. 3*. Quæ modo ex legibus gravitatis eruta eſt æquatio quadruplo major eſt quam Manfredius, & quintuplo minor quam Hallejus ex obſervationibus collegerant. Porro qua ratione intelligitur velocitatem projectionis Terræ, & quantitatem anni Solaris imminui paulatim ſucceſſu temporis, percipietur etiam imminui tempus periodicum revolutionis Lunæ, & motum medium augeri oportere: quod Halleji, & Newtoni obſervationibus conforme eſt.

APPENDIX

DE MOTIBUS APPARENTIBUS

PLANETARUM.

QUoniam præcipuas Planetarum inferiorum, superiorumque inæqualitates, quæ ex mutua attractione pendent, in orbitis circularibus, atque ellipticis investigavimus, ne quidpiam in universa cælesti Physica desideretur, quod ad notissimorum phænomenorum explicationem conducat maxime, operæ pretium erit alias etiam attingere aberrationes motus, quæ mere apparentes sunt, & inæqualitates opticæ dici possunt. Eæ vero ad duas classes potissimum reducuntur. Aliæ enim sunt, quæ pendent ex vario telluris loco in sua orbita, & quibus fit ut Planetæ tardiores, celerioresque, directi, retrogradi, & stationarii aliquando videantur. Aliæ ex finita proportione velocitatum Terræ, & lucis pendent: qua quidem finita proportione fit ut non in Stellis fixis dumtaxat, verum etiam in Planetis omnibus, Cometisque, certæ, ac regulares aberrationes motus exoriantur. Utrasque modo appendicis, & coronidis loco exhibebimus, quoniam directionum, & retrogra-

gradationum theoriam ruditer hactenus attigerunt, qui elementaris Astronomiæ principia complexi sunt Keillius, Wolfius &c: theoria vero aberrationis lucis in Sole, Luna, & Planetis omnibus brevius, ac simplicius absolvi potest, quam alii authores celeberrimi præstiterint. Satis autem hic erit orbitas Planetarum veluti circulares, & concentricas Soli considerare. Cum enim quæ ex luce oritur aberratio adeo exigua sit, differentia omnis quæ orietur ex orbitarum ellipticitate, ad sensum penitus erit nulla. Directiones vero, & retrogradationes Planetarum ad minuta usque definire supervacaneum videri posset. Cæterum etiam si in hypothesi orbitarum ellipticarum investiganda essent omnia, calculus quidem longior, atque implexior evaderet, calculi tamen methodus ac ratio penitus eadem maneret.

Problema Primum.

Determinare apparentias motus Planetarum, quæ ex motu Terræ circa Solem proficiscuntur.

Resolutio.

Statuatur Terra in loco C, Sol in N, Planeta vero in E, *fig.* 13., & quo tempore juxta tangentem orbitæ motum suum prosequendo Terra rectam CD absolveret, possit Planeta absolvere rectam EG. Quoniam communis motus relativos alios motus non turbat, ut ex Mechanica notum est, eædem adhuc apparentiæ motus habebuntur si intelligatur Planetis omnibus imprimi motum æqualem ipsi ED, parallellum directioni Terræ, & contrarium. Tum vero quiescente Terra, & motu ad Planetas alias translato, in primis Sol ex adversa parte moveri semper videbitur, eodemque tempore revolutionem apparentem circa Terram absolvet juxta ordinem signorum, quo Terra revolutionem suam absolvit circa Solem. Deinde si fiat $ET=CD$, & compleatur parallellogramum $ETHG$, Planeta motu composito juxta EH progredi videbitur. Ex N in CE, quæ centra Terræ, & Planetæ jungit, du-

ducatur perpendiculum NM, & ex G, & H perpendiculares aliæ GO, Hu. Producatur inſuper, ſi opus eſt, GH in i; & fiat $CD=f$, $EG=c$, $CN=a$, $NP=b$, ſinus anguli $ACB=t$, ſinus totus $=1$. Erit $MN=at$, $CM=a\sqrt{(1-t^2)}$, $EM=\sqrt{(b^2-a^2t^2)}$, & ſi orbitæ circulares intelligantur, ut ſit angulus NEG rectus ſimilia erunt triangula ENM, GEO, & fiet $GO=\frac{c}{b}.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}$. Tum etiam ob angulos GiO, DCE MNC inter ſe æquales ſimilia erunt triangula GiO, MNC, & fiet $Gi=\frac{c.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}}{b.\sqrt{(1-t^2)}}$. His poſitis, ſi Planeta E inferior intelligatur, erit $CE=CM\mp ME=a\sqrt{(1-t^2)}\mp\sqrt{(b^2-a^2t^2)}$, $Hi=Gi\mp GH=\frac{c\sqrt{(b^2-a^2t^2)}}{b\sqrt{(1-t^2)}}\mp f$, & valebit ſignum ſuperius pro prima, & inferiore conjunctione, inferius vero pro conjunctione altera. Inſuper ob $CN:CM=Gi:GO=Hi:Hu$, prodibit $Hu=\frac{c}{b}.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}\mp f.\sqrt{(1-t^2)}$, & ſinus apparentis aberrationis $\frac{Hu}{HC}$, aut proxime $\frac{Hu}{EC}$ fiet $=\frac{c.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}\mp bf.\sqrt{(1-t^2)}}{ba.\sqrt{(1-t^2)}\mp b.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}}$, Sunt autem velocitates Planetæ, & Terræ c, & f circa Solem in ratione ſubduplicata diſtantiarum b, & a reciproce. Itaque ſinus anguli aberrationis, quæ in Planeta inferiore orietur ex motu Terræ, fiet $=\frac{\sqrt{(ab^2-a^3t^2)}\mp b.\sqrt{(b-bt^2)}}{ab.\sqrt{(ab-abt^2)}\mp b.\sqrt{(ab^3-a^3bt^2)}}$. Si Planeta E ſit ſuperior, evadet $CE=\mp a.\sqrt{(1-t^2)}+\sqrt{(b^2-a^2t^2)}$, $Hi=\frac{c.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}}{b.\sqrt{(1-t^2)}}\mp f$, $Hu=\frac{c}{b}.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}\mp f.\sqrt{(1-t^2)}$, & puncta H, G jacebunt ex adverſis partibus rectæ CE in oppoſitione Planetæ ipſius cum Sole, & valebit ſignum ſuperius pro oppoſitione, inferius pro conjunctione. Inde autem ſimili modo eruetur ſinus apparentis aberrationis $=\frac{\sqrt{(ab^2-a^3t^2)}\mp b.-\mp b\sqrt{(b-bt^2)}}{\mp ab.\sqrt{(ab-abt^2)}+b.\sqrt{(ab^3-a^3bt^2)}}$. Q. E. J.

Co-

Corollarium Primum.

Hinc primo si sit $t = 0$, hoc est si Terra, & Planeta sint in eadem linea recta cum Sole, erit motus angularis inferioris Planetæ a Terra spectati $= \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a.\sqrt{ab} \pm b.\sqrt{ab}}$: scilicet ob $a > b$, circa primam conjunctionem cum Sole inferiores Planetæ progredi videbuntur ad eamdem plagam, versus quam Tellus fertur, & cum citra Solem sint, moveri ex Terra videbuntur ad partes oppositas cum Sole. Circa conjunctionem alteram ad easdem partes cum Sole tendent. In prima conjunctione igitur erunt retrogradi, & directi in conjunctione altera, & erit velocitas directionis ad velocitatem retrogradationis ut $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a + b} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = 1 + \frac{2\sqrt{ab}}{a + b} : 1$, sive ut summa ad differentiam velocitatum directe, & reciproce ut summa ad differentiam radiorum. Id etiam patet ex ipsa constructione. In aliis locis quibuslibet data elongatione inferioris Planetæ a Sole inveniri poterit sinus apparentis directionis, aut retrogradationis.

Corollarium Secundum.

In Planetis superioribus si fiat $t = 0$ evadet sinus apparentis aberrationis $= \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\mp a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab}}$, & cum sit $b > a$, in conjunctione cum Sole Planetæ ipsi juxta ordinem signorum, & contra signorum ordinem tendent in oppositione: scilicet in primo casu erunt directi, & retrogradi in casu altero, & velocitas directionis ad velocitatem retrogradationis se habebit rursus ut summa ad differentiam velocitatum, & reciproce ut summa ad differentiam radiorum. Ex ipsa etiam constructione patet, quod cum sit $ET > EG$, Planeta in oppositione ex E in H moveri videbitur, dum vere ex E in G tendet. Circa conjunctionem alteram cum bini motus ET,

EG conspirent inter se invicem, eadem erit ratio superiorum Planetarum, inferiorumque.

COROLLARIUM TERTIUM.

Ut inveniatur quo in loco orbitæ habeatur statio, aberrationis totius sinus nihilo æquandus erit. Tum vero habebitur $\surd(ab^2 - a^3 t^2) + b \cdot \surd(b - b t^2) = 0$, sive Planetæ superiores sint, sive inferiores, & inde eruetur $ab^2 - a^3 t^2 = b^3 - b^3 t^2$, & $t = \pm b \cdot \surd\left(\frac{a-b}{a^3 - b^3}\right)$ pro Planetis inferioribus, pro superioribus autem $t = \pm b \cdot \surd\left(\frac{b-a}{b^3 - a^3}\right)$: qua formula duo prodibunt orbitarum singularum puncta, in quibus Planetæ utrimque fient stationarii. In Planetis inferioribus cum angulus NCE semper acutus sit, quantitas $\pm b \cdot \surd\left(\frac{a-b}{a^3 - b^3}\right)$ exprimet sinum elongationis Stationarii Planetæ a Sole. In Planetis superioribus erit $\pm b \cdot \surd\left(\frac{b-a}{b^3 - a^3}\right)$ sinus complementi ad duos rectos anguli elongationis e Terra visæ.

COROLLARIUM QUARTUM.

Numeris in locum specierum substitutis prodibit stationis locus. Ex. gr. in Venere cum juxta Bullialdum sit $a = 100000$, $b = 72400$, prodibit $t = 0.48270$, qui est sinus $28° 52'$. Anno 1756 die 26 Julii Venus stationaria visa est in distantia $28° 54'$ a Sole. In Saturno autem cum sit $b = 951000$, eruetur $t = 0.94651$, qui est sinus $71° 11'$, adeoque Saturnus fiet stationarius in distantia $108° 49'$. Jupiter stationarius erit in distantia $115°$ circiter, & in distantia adhuc majore Mars. Die 8 Octobris ejusdem anni 1756 Saturnus visus est stationarius in distantia $108° 3' 7''$.

SCHO-

SCHOLION.

Formula, qua ſtationes Planetarum in ſuperiore corollario definivimus, omnino cum ea convenit, quam Hermannus exhibuit *to.* 1. *par.* 3. *num.* 7. Miſcellaneorum Berolinenſis Academiæ, & cum aliis Bernoullii, Duillierii, & Moyvræi. Hermannus etiam *to.* 2. *par.* 2. *num.* 1. ulterius progreſſus eſt, ut ſtationum puncta in orbitis ellipticis determinaverit: quod ante ipſum præſtiterat Hallejus. Et quidem ſi dato ſtationis loco quæratur quo alio in loco orbitæ ellipticæ Planeta fiat ſtationarius, facilior evadit calculus, & contra implicatiſſimis calculis opus eſt ſi generatim ſtationum puncta inveſtigentur. Nos vero ſtationum problema corollarii loco attigimus, & quæ ad apparentes motus Planetarum in hypotheſi orbitarum circularium pertinent, unica formula complexi ſumus. Ea etiam problemati aberrationis lucis, quæ in Planetis contingit, reſolvendo ſatis erit, ut mox videbimus.

Problema Secundum.

Poſito quod celeritas Terræ ad celeritatem lucis datam rationem habeat, determinare apparentes fixarum motus.

Resolutio.

Feratur Terra ex A in B, *fig.* 14., & radius lucis EBC ex ſtella E ad ſpectatoris oculum perveniat in loco B, & ſit celeritas Terræ ad celeritatem lucis ut $AB : CB$. Quia motus communis relativos corporum motus inter ſe, & viſionis phænomena non turbat; ſtatuamus & luci, & oculo ſpectatoris imprimi motum contrarium, & æqualem illi, quem habet Terra. Lux in quieſcentem oculum illabetur viribus BA, BC, completoque parallellogrammo $ABCD$, & ducta EF parallella directioni Terræ, Stella in loco F, & directione DBF videbitur, & erit BE ad EF ut celeritas lucis ad celeritatem Terræ. Ex F

in BA, BE, & ex E in BF ducantur perpendicula Fe, Fc, Ef. Erit angulus EFf æqualis angulo FBe, & similia erunt triangula BeF, FfE, & fiet $Ef = \frac{FE . Fe}{BF}$. Rursus ob similitudinem triangulorum BFc, BEf erit $Ef = \frac{BE . Fc}{BF}$. Erit itaque $BE : FE = Fe : Fc$, sive erit celeritas lucis ad celeritatem Terræ ut sinus anguli FBe ad sinum anguli FBc: quod est ipsum Cl. Bradley theorema. Quod si igitur pari ratione motu omni ad stellam fixam, & emanantem lucem relato accipiatur semper $BE : EF$ ut celeritas lucis ad celeritatem Terræ, & EF statuatur parallella directioni motus, quem Terra juxta tangentem concipit, Stella semper videbitur in F, & unius anni tempore circulum FHG describet plano Eclipticæ parallellum, ea quidem lege ut dum Terra erit ex plaga punctorum M, H, Stella referatur ad puncta H, & G. Recta quæ a Terra ducetur ad puncta singula, ob infinitam Stellæ distantiam, superficiem coni scaleni designabit, cujus vertex erit ipse spectatoris oculus. Ut ergo habeantur loca, ad quæ referetur Stella, & in cælo e Tellure spectabitur, secari intelligatur Conus in puncto E plano rectæ BE perpendiculari. Sectio erit ellipsis, cujus axis major ad minorem se habebit ut sinus totus ad sinum inclinationis rectæ BE cum basi ejusdem coni, sive ut sinus totus ad sinum latitudinis stellæ propositæ. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si concedamus celeritatem lucis advenientis e Stellis fixis, & a Sole eamdem esse, & ponamus Terram motu annuo hexapedas Parisienses 14336 uno minuto secundo temporis conficere, lucem vero tempore 8' 12", aut 8' 13" conficere spatium Soli, & Terræ interjectum 22000 semidiametrorum terrestrium mediocrium, sive hexapedarum 22000. 3273035; erit Ff sinus 20", aut 21". Bradlejus mediam aberrationis quantitatem observationibus collegit esse $20\frac{1}{4}$" in Stel-

Stellis quibusdam fixis, & 20″, aut $20\frac{1}{2}''$ in quibusdam aliis. Aberrationes diurnæ annuis aberrationibus tanto minores erunt quanto velocitas motus annui major est velocitate diurni motus: erunt scilicet penitus insensibiles. Si oculus spectatoris in Planetis aliis constitueretur, apparentes aberrationes eamdem sequerentur rationem velocitatis diurnæ, & annuæ. Ex. gr. cum in Æquatore Jovis velocitas diurni motus major sit motus annui velocitate, oculo ibidem posito aberratio diurna major erit aberratione annua, & ita porro.

Corollarium Secundum.

Si Stella *E* in polo Eclipticæ reperiatur, conus *BFNG* rectus erit, & ellipsis apparenti motu percursa ab eadem Stella in circulum baseos facesset. Si vero stella in plano Eclipticæ collocetur, ellipsis in lineam rectam, & majorem axem abibit, & excursiones apparentes Stellæ citra, & ultra punctum *E* habebuntur dumtaxat in plano Eclipticæ, erroresque omnes longitudinem Stellæ afficient, non latitudinem. A plano directe ad polum Eclipticæ transeundo maxima latitudinis aberratio proportionalis erit ipsi latitudini: aberratio maxima longitudinis ubique eadem, & constans erit: in polo demum aberrationes maximæ longitudinis, & latitudinis Stellæ fixæ æquales fient inter se.

Corollarium Tertium.

Si Polus Eclipticæ sit *I*, *fig.* 15., *IEVA* planum circuli per polum ipsum perpendiculariter ad Eclipticam transeuntis, *T* locus Stellæ dum Terra est in *D*, *H* vero dum ad *C* pervenit; ducta *Tt* ad *MG* normali, erit *EV* latitudo media Stellæ *E*, *tV* latitudo apparens in *T*, & *Tt* augmentum longitudinis. Erit etiam differentia semiaxis *ME*, & semidiametri *TE* ellipseos *MTHGN* quarta proportionalis ad quadratum sinus totius, quadratum sinus anguli *MET*, aut *ZAD*, & differentiam semiaxium *ME*, *HE*.

Erit denique ſinus totus ad ſinum anguli MET ut $TE:Tt$. & ſinus totus ad ſinum anguli TEH, aut DAC ut $TE:tE$, Hoc ipſo longitudo, & latitudo vera Stellæ fixæ ex apparente eruetur. Data vero longitudine, & latitudine, dabitur etiam aſcenſio recta, & declinatio.

SCHOLION.

En igitur ex primis motus principiis erutum quod exemplo lapidis in navim motam projecti Euſtachius Manfredius *to.* 1. Comment. Bononienſis Academiæ, tubi mobilis Simpſonius, *Eſſays on ſeveral curious and uſeful ſubjects* &c. & tubi mobilis, ac pluviæ decidentis Cleroutius explicavit in Monumentis Pariſienſis Scientiarum Academiæ anni 1737. Ipſi etiam practicas regulas calculi Arithmetici ſingillatim tradiderunt, quibus poſtmodum ſupputatas aberrationis tabulas exhibuit Cl. Winsheim *to.* 1. Novorum Commentariorum Petropolitanæ Academiæ, quos nuper ab Imperiali Academia humaniſſime dono datos accepi. Simpſonius in eodem opere *Prop.* 2. theorema apprime elegans propoſuit, quod ſi Terra in ellipſi circa Solem moveri intelligatur, ob lucis aberrationem Stellæ fixæ adhuc circulos non concentricos, ſed excentricos deſcribent: quod quidem theorema Thomas Perellius multo ante Euſtachio Manfredio generaliter ſic conceptum communicaverat: *Si ſpectatoris oculus in ſectione aliqua Conica moveatur, ſemita fixæ cujuſcumque ſemper evadet circulus, & centrum apparentis motus aut intra, aut extra, aut in ipſa erit peripheria circuli, prout ſectio Conica aut ellipſis, aut hyperbola erit, aut parabola.* Generalem etiam theorematis demonſtrationem breviter, & Geometrice de more ſuo exhibuit Perellius. Sunt enim velocitates corporum curvam quamcumque deſcribentium reciproce ut perpendicula in tangentes demiſſa: perpendicula vero in ellipſi deſinunt ſemper in peripheriam circuli axe majore ellipſeos deſcripti: in circulo autem cum rectangula omnia rectarum in eodem puncto ſe interſecantium æqualia ſint, erunt perpendicula ipſa, ſive velocitates corporum, proportio-

tionales rectis quæ habentur tangentium perpendiculis ad oppositam usque peripheriæ circularis partem productis. Cum igitur in Stellis fixis distantiæ a centro motus ob lucis aberrationem proportionales sint iisdem velocitatibus, Stellarum semita erit circulus subverse positus, & excentricus, si spectatoris oculus ellipsim conicam circa Solem describat. Si distantiæ foci ellipseos a vertice infinitam rationem habeant inter se invicem, hoc est si ellipsis in parabolam vertatur, centrum apparentis motus erit in ipsa peripheria circuli: & ultra peripheriam cadet si parabola abeat in hyperbolam, ut ex se patet. Ubi perpendiculum, quod a fixa ad planum orbitæ ducitur, minime transeat per focum sectionis conicæ, apparens fixæ semita erit elliptica, & longitudinis, ac latitudinis aberrationes simili modo ac supra inveniri poterunt.

Problema Tertium.

Iisdem positis invenire apparentes motus Planetarum, qui ex aberratione lucis oriuntur.

Resolutio.

In primis maneat ET, ut in *fig.* 13., parallela directioni Terræ CD, accipiaturque CE ad ET ut celeritas lucis ad celeritatem Terræ, & CE ad EG ut celeritas lucis ad Planetæ celeritatem. Producatur etiam ET in t, ut sit $ET = Et$, & ex t in CE ducatur perpendiculum te. Quia per *Coroll.* 1. *Probl.* 2. celeritas lucis ad celeritatem Terræ se habet ut sinus totus ad sinum 20'', & ob maximam lucis rapiditatem Terræ celeritas ad celeritatem lucis, sive a Sole advenientis, sive a Planetis reflexæ ad sensum eamdem rationem habere debet, anguli vero exigui sunt proxime ut sinus sui, reliquis primi Problematis denominationibus retentis erit

$$te = \sqrt{(1 - t^2)} . 20'', \quad c = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} . 20'', \quad GO = \frac{c}{b} . (b^2 - a^2 t^2)$$

$= \sqrt{}$

$= \frac{\sqrt{a} . \sqrt{(b^2 - a^2 t^2)}}{b . \sqrt{b}}$ 20''. His positis si Planeta motu omni destitueretur, quo tempore in *E* foret, ex Terra *C* versus *D* mota videretur in loco *t*, & esset sinus aberrationis lucis $= \pm \sqrt{(1 - t^2)}$. 20'', atque in Planetis inferioribus valeret superius signum pro prima conjunctione, & inferius pro conjunctione altera cum Sole, in Planetis autem superioribus superius pro oppositione, inferius pro conjunctione. Quod si Planeta ipse in sua orbita moveri intelligatur, quo tempore ex *E* lux ad spectatoris oculum perveniet, Planeta ex loco *E* ad *G* transibit, atque erit *G* locus verus, *t* autem apparens Planetæ locus, & differentia loci veri, & visi, sive aberratio, quæ ex luce orietur erit $= \frac{\sqrt{a} . \sqrt{(b^2 - a^2 t^2)}}{b . \sqrt{b}}$. 20'' $\mp \sqrt{(1 - t^2)}$. 20''. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Planetæ igitur inferiores ante primam conjunctionem angulum elongationis a Sole e Terra visæ aberratione lucis habebunt auctum, & imminutum post conjunctionem. Ante conjunctionem superiorem rursus augebitur ipse angulus, & post conjunctionem minuetur. Scilicet circa primam conjunctionem minuetur Planetarum retrogradatio, & apparens longitudo augebitur, circa alteram vero directio Planetarum, & longitudo apparens imminuetur.

COROLLARIUM SECUNDUM.

In Planetis superioribus post oppositionem, & conjunctionem minuetur elongationis angulus, ante oppositionem vero, & conjunctionem augebitur: scilicet imminuetur in conjunctione, & in oppositione apparens Planetarum longitudo augebitur. In oppositione Planetarum superiorum, & prima inferiorum conjunctione erit angulus aberrationis $= \left(\frac{a - \sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)$. 20'', in allis autem conjunctionibus $= \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)$.

20''

20'', atque erunt inter se aberrationes in simplici ratione differentiæ ad summam velocitatum.

Corollarium Tertium.

In Mercurio cum juxta Bullialdum sit $b = 38806$, erit $\sqrt{ab} = 62293$, & $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right).20'' = \left(\frac{\sqrt{ab}-b}{b}\right).20'' = \frac{23487.20''}{38806} = 6''.9$. Hæc erit igitur aberratio, quæ in prima conjunctione ex luce orietur. In conjunctione altera cum Sole fiet aberratio $= \frac{101099.20''}{38806} = 54''$. In Venere cum sit $b = 72400$, erit pro conjunctione inferiore aberratio $= \frac{12688.20''}{72400} = 3''.5$: pro superiore autem $= \frac{157488.20''}{72400} = 43''.5$.

Corollarium Quartum.

In Marte cum sit $b = 152350$ erit aberratio $= \frac{28920.20''}{152350} = 3''.7$ in oppositione, & in conjunctione $= 36''.2$. In Jove est $b = 519650$, & aberratio in oppositione $= 10''.6$, in conjunctione vero $= 29''.4$. Saturnus pariter in conjunctione a loco vero aberrabit angulo $26''.5$, & in oppositione $13''.5$. Patet autem quod cum ad easdem partes in oppositione moveantur Planetæ superiores, & inferiores in prima conjunctione, ad quas si motu omni destituerentur communi fixarum aberratione ex motu Telluris orta deberent ferri; in casu utroque differentia loci veri, & visi dato quocumque tempore erit differentia duarum aberrationum quæ orientur ex motu Terræ, & Planetarum. In aliis conjunctionibus ob contrarium rationem aberrationum summa accipienda erit.

Corollarium Quintum.

Ex iisdem principiis præsto erit Solis longitudinem ob lucis aberrationem constanter minui angulo 20''. In Luna insensibilis erit aberratio. In aliis Planetis omnibus, quando appa-

apparent ſtationarii omnino nullam eſſe oportere facile intelligetur. Aberrationes latitudinis, & æquationes aberrationum aliarum, quæ orientur ex ellipticitate orbitæ, in maxime excentrica orbita Mercurii erunt circiter 4", minores ſcilicet quam ut ipſarum ratio aliqua haberi debeat. Sed neque implicatiore calculo opus eſt ſi aut longitudinis æquationes, aut aberrationes totæ latitudinis Planetarum, Cometarumque dato quocumque tempore inveſtigentur. Data enim velocitate alicujus corporis, loco, & directione motus, tota etiam datur aberratio. Videatur tamen excellens Clerautii opus de aberratione lucis, quod commentariis Pariſienſis Academiæ anno 1746 inſertum eſt, & quo ipſe primam, ac generalem horam Problematum ſolutionem exhibuit.

SCHOLION.

Cl. Perellius aliud theorema pro aberrationibus Planetarum, quæ ex luce oriuntur, ſupputandis mecum nuperrime communicavit. Scilicet primo inquirenda eſt aberratio Stellæ alicujus fixæ, quæ ſpectetur ex Terra noſtra, & cum Planeta aliquo, qui proponitur, conjungatur. Deinde inveſtiganda eſt aberratio fixæ alterius, quæ ex ipſo Planeta in conjunctione cum Terra videri poſſet. Duarum aberrationum differentia accipienda eſt ſi Terra, & Planeta moveantur ad eaſdem partes, ſumma vero ſi ad partes ex diametro oppoſitas moveantur. Patet enim totius quæſitæ aberrationis duas eſſe partes, quarum una ex motu Terræ, altera ex motu Planetæ oritur. Prior eadem eſt aberratio Planetæ, qui motu omni deſtituatur, aut alicujus fixæ, quæ in cælo cum Planeta conjuncta ſit. Altera eſt aberratio Terræ immobilis, atque ex Planeta viſæ, aut Stellæ quæ cum Terra conjungatur. Quod ſi vero Terra, & Planeta eamdem habeant motus directionem, aberrationes binæ fient ad eamdem partem, ad oppoſitas autem ſi oppoſita ſit utriuſque motus directio. Ita ex ſolis tabulis aberrationis lucis in Stellis fixis, Planetarum aberrationes deduci poterunt.

DE

DE MOTU DIURNO, ET ANNUO PLANETARUM.

Cartesiani Philosophi cum a vorticibus Planetas omnes deferri vellent, & in majore distantia a Sole velocitates vorticum decrescere, Planetas in locis citimis, atque extimis diversimode impulsos asseruerunt, præter motum periodicum totius vorticis, aliquem etiam rotationis motum participare. Difficultati, quæ ex lege ipsarum velocitatum, & rotationum singularum rapiditate desumi solet, voluit occurrere Cassinus Filius Atmosphæram Planetarum ad ea usque loca extendendo, in quibus differentia velocitatum totius vorticis par esset inducendæ celerrimæ vertigini, quam in Marte, Terra, & Jove deprehendimus. At præter quam quod nimium ampla Planetarum Atmosphæra statueretur, & extremis in locis rarior, quam ut posset receptum motum ad Planetas usque transfundere; accedit, quod Villemotio Hirius opposuerat, diurnum motum in hac hypothesi non ab Occidente in Orientem, sed ab Oriente in Occidentem debere fieri. Nam si in locis inferioribus tardior, & velocior est Planeta in superioribus, quam circumfusa vorticis materia, ab inferiore ipso hemisphærio ad superius refluet, & contrarium motum communicabit. Si eam vorticum velocitatem Cartesiani esse vellent, quam solam haberi posse Alembertius demonstravit, & quæ in ratione simplici distantiarum augetur, tuerentur utique directionem diurni motus, at simul etiam agnoscerent suos vortices servandæ legi temporum periodicorum, deferendisque Planetis penitus esse impares.

Ipse etiam Alembertius, §. 419. de fluidis, eam Mairani hypothesim reprehendit, qua cum Planetæ partem obversam centro graviorem esse intelligeret, levioremque aliam, quæ aversa est, censuit plus efficaciæ in superiore hemisphærio habere materiam subtilem, & perpetuam circulationem hoc modo gignere: dato enim quod ex majore vi centrifuga fluidi, in quo mergitur inferius hemisphærium majorem gravitatem adipiscatur, partes omnes a centro vorticis æqualiter dissitæ eodem modo gravitare debent, & in directum urgeri semper secluso motu circulari. Difficultates alias adjecerat Joannes Bernoullius, *par.* 3. Cælestis Physicæ, ex modica gravitatis diversitate, & maxima Planetarum velocitate circa centrum derivatas. Is vero cum Planetarum circa Solem deferendorum munus Solari vortici non tribueret, & pluviam quamdam statueret particularum lucis in vorticis confinio compactarum, & torrentis modo relabentium in Solem ipsum, ex eadem pluvia diurnum motum oriri censuit quatenus scilicet anteriores Planetæ partes luci relabenti obviam fierent, posteriores vero ipsius ictibus sese eriperent. Quo plane quid sibi voluerit vir clarissimus non intelligo: dato enim quocumque tempore Occidentalis, & Orientalis cujuscumque Planetæ pars eodem numero particularum relabentium, eademque vi impelleretur, neque aliquis motus vertiginis haberi posset.

Optime vero in suis Propositionibus Mechanico-Dinamicis *num. xxxiv. & sequ.* Johannes idem Bernoullius animadvertit eamdem esse caussam diurni, quæ annui motus Planetarum. Cum enim ante ipsum omnes Mechanicæ scriptores motus corporum explicaturi non nisi aut puncta indivisibilia consideraverint, aut corpora, quorum gravitas in centro coacta esset; primus omnium Bernoullius Mechanicam corporibus quibuscumque, ut vere sunt, gravibus, & extensis aptare docuit: quod alii postmodum argumentum, atque in primis Eulerus, & Alembertius felicissime prosecuti sunt. Huc autem redeunt quæ a Bernoullio inventa, & demonstrata sunt. Si corpus aliquod BTZ, *fig.* 16., impellatur vi aliqua $L\mathcal{P}$, quæ non transeat per centrum gravitatis E; primo

mo oscillari incipiet totum corpus circa punctum aliquod D. Centrum ipsum primæ, & spontaneæ rotationis D, erit in recta BG, quæ transibit per centrum gravitatis E, & per punctum L, cui vis prior impressa est. Denique centrum spontaneæ rotationis sic comparatum erit, ut corpus ex D suspensum, centrum oscillationis habeat in L: aut, quia demonstrante Hugenio punctum suspensionis, & centrum oscillationis in pendulo composito converti possunt, ut corpus ex L suspensum centrum oscillationis habeat in D. His autem positis manifestum est quod cum centrum gravitatis ea velocitate, quam semel concipit, progredi debeat in directum, totum corpus velocitate EF in directum moveri perget, differentia vero velocitatis in punctis singulis concipiet motum alium rotationis. Punctum D quod velocitatem circulatoriam habebit æqualem illi, qua centrum gravitatis progredietur, describet in unaquaque revolutione vulgarem Epicycloidem, cætera vero puncta Epicycloides alias pro varia a centro distantia correptas, aut oblungatas.

Facile etiam determinabitur punctum L, cui vis prima applicanda erat in singulis Planetis, ut ea prodiret celeritas rotationis, & projectionis, quam exhibent observationes. Statuamus enim D fuisse centrum spontaneæ illius, & a Planetis primo conceptæ rotationis. Erit peripheria ad radium ut spatium a centro E una Planetæ revolutione percursum circa Solem ad ED. Tum si Planeta aut sphæricam figuram habeat, aut sphæricæ satis accedentem, accipiendo ex regulis Hugenianis duas quintas partes tertiæ proportionalis spatio DE, & Planetæ radio, pro distantia LE obtinebimus duas-quintas partes producti ex quadrato radii Planetæ ipsius in peripheriam, divisi per radium ductum in ED. Ita si in Terra nostra assumamus mediocrem radium Parisiensium hexapedarum 3273035, & distantiam mediocrem a Sole circiter 22000 semidiametrorum hujusmodi, erit tota orbis annui perimeter hexapedarum 452418535910 : quæ quoniam circiter 31556920 secundis temporis absolvitur; erit spatium a centro Terræ horis 23, 56' 4" sive 86164", una scilicet syderea die circa Solem confectum hexapedarum

 1235297079,

1235297079, ED vero 196606258, hoc est fere 60 non diametrorum ut *num. xxxvii.* asseruerat Bernoullius, sed semidiametrorum terrestrium. Erit demum LE hexapedarum 21886, seu circiter $\frac{1}{150}$ semidiametri ipsius, quemadmodum in eodem loco Bernoullius determinaverat. Simili methodo invenit ipse in Marte, & Jove vim priorem ad distantiam $\frac{1}{418}$, $\frac{7}{19}$ a centro imprimi oportuisse ut ea prodiret, quæ observationibus deprehenditur, motus diurni, & periodici proportio.

Ego cum aliquot ab hinc annis argumentum idem excolere cæpissem in aliud plane elegans theorema incidi, quo illustrari diurni, & annui motus relationem, & simul etiam Mechanicam corporum magis promoveri posse existimabam: quod scilicet si vis aliqua corpori alicui imprimatur, & directione sua non transeat per centrum gravitatis, uterque motus, qui suborietur, projectionis, & rotationis sic comparabitur, ut motus rotationis idem sit ac si fixum esset centrum gravitatis, & nullus fieret motus projectionis, motus vero ipse projectionis sit idem ac si vis omnis parallella directione in centro gravitatis impressa esset, & tota in motum projectionis, seclusa rotatione qualibet, impenderetur. Quod a Cl. Alembertio theorema cum in nova Dinamicæ editione primo propositum, demonstratumque invenerim, demonstrationem tamen, quæ mihi antea exciderat, & quæ brevissima, & simplex est, hic adjiciam. Nihil autem ex Johanne Bernoullio hic præmittam, nisi quod duplici ratione demonstravit ipse citato in loco, quod scilicet centrum primæ, & spontaneæ rotationis in illa semper diametro gravitatis reperiatur, in cujus aliquo puncto vis prior impressa est.

THEOREMA.

Si corpori cuicumque $BZGT$, *fig.* 16., & in puncto quocumque L diametri BG transeuntis per centrum gravitatis E, vis aliqua LP perpendiculariter imprimatur; dico 1°. quod totum corpus duplicem motum projectionis, & rota-

ta-

tationis circa gravitatis centrum concipiet: 2°. quod motus projectionis quantitate idem erit, ac si vis tota in centro ipso impressa esset, & directione sua directioni vis impressæ parallellus: 3°. quod motus rotationis idem erit ac si centrum gravitatis fixum maneret, & nullum projectionis motum corpus acquireret.

DEMONSTRATIO.

In primis manifestum est, quod vi impressa totum corpus oscillari incipiet circa punctum aliquod D, & diameter BG in AI abibit, & erit FE spatium a gravitatis centro absolutum. Ducatur per punctum F, *fig.* 17., recta CH priori BG parallella. Erit velocitas puncti cujuscumque $M = MN = MO \pm NO = FE \pm \frac{HI \cdot FO}{FH}$, prout scilicet punctum M aut citra, aut ultra centrum gravitatis cadet. Jam vero, ob proprietatem ejusdem centri, summa omnium $M.FO$ utrimque æquari debet. Itaque cum ratio $HI : FH$ sit constans, diametri BG puncta omnia duplicem motum concipient, unum communem centro gravitatis, alterum proportionalem distantiæ a centro, tendentem in contrarias partes hinc inde, & qui priorem motum minime afficiet. His prænotatis.

Pars prima. Quia puncta omnia diametri BG non possunt communi motu FE in directum promoveri, nisi etiam totum corpus eadem velocitate projiciatur, nec possunt velocitate proportionali distantiæ a centro gravitatis circa centrum ipsum revolvi, nisi etiam totum corpus idem rotationis suæ centrum habeat; patet primo quod corpus duplicem motum concipiet unum projectionis, & alterum rotationis circa centrum gravitatis. Quod erat primum.

Pars altera. Porro si centrum primæ, & spontaneæ rotationis D fixum esset, momenta vis prioris quomodocumque applicatæ in L, aut E proportionalia essent distantiis DL, DE a puncto D, & eadem semper esset velocitas centri gravitatis, sive vis ipsa in L, sive in E imprimeretur.

tur. Rursus si punctum D fixum esset, & vis imprimeretur in centro E, eamdem velocitatem centrum ipsum acquireret, qua totum corpus libere projiceretur. Itaque motus projectionis semper erit idem, ac si in centro gravitatis, directione parallela, imprimeretur vis omnis, & nullus haberetur motus rotationis. Quod erat alterum.

Pars tertia. Denique si vis omnis in puncto L imprimeretur, & primo centrum gravitatis E, tum vero centrum spontaneæ rotationis D fixum intelligeretur, essent momenta inter se ut LE, LD, & differentia momentorum esset DE, At vero momento DE gignitur velocitas EF, quæ gravitatis centro, & particulis omnibus est communis, sive gignitur motus projectionis. Momentum igitur, quod in motum rotationis impenditur, semper est idem, adeoque eadem etiam est rotatio, sive punctum E fixum sit, sive libere totum corpus eadem vi in eodem puncto L impellatur. Q. E. D.

Corollarium Primum.

Si vis aliqua diametro BG imprimatur in puncto L directione obliqua PQ, & in duas resolvatur LP, LQ, altera LQ cum transeat per centrum gravitatis, tota impendetur in motum projectionis, prior vero LP eumdem motum projectionis gignet, ac si in centro E impressa esset. Itaque centrum gravitatis motu composito feretur juxta lineam lineæ PQ parallellam, eademque semper velocitate, quodcumque sit punctum L. Quod si directio vis impressæ plano alicui proposito BTZ obliqua fuerit, referenda erit ad planum aliud, quod per centrum gravitatis transeat, & in quo jaceat linea directionis, atque eadem rursus theoremata habebuntur.

Corollarium Secundum.

Si vis quæ corpori imprimitur ex impactu alterius corporis ortum ducat, resolvenda est in duas alias, quarum una tangenti impulsi corporis parallella sit, altera vero in ipso impactus puncto perpendicularis. Priore vi impellens corpus nullum mo-

motum communicabit: altera, si per centrum corporis impulsi transeat, solum communicabit motum projectionis. Ita quia perpendiculares omnes superficiei cuicumque sphæricæ per centrum gravitatis transeunt, sphæra ab aliis corporibus utcumque impulsa solum projectionis motum adipiscetur. Si quæ tangenti corporis perpendicularis est vis minime transeat per centrum gravitatis rursus resolvenda erit in duas, quarum una transeat per centrum ipsum, & projectionis motum dumtaxat gignat, altera gignat simul motus projectionis, & rotationis, ut antea dictum est.

COROLLARIUM TERTIUM.

Si vis, quæ superficiei extimæ imprimitur, tota in corpus transeat, ex. gr. si filo alicubi in superficie ipsa alligato trahatur corpus, & producatur directio fili quousque diametro alicui BG perpendiculariter occurrat in puncto L; eodem modo aget vis, ac si in puncto L impressa esset. Quod si minime coincidant puncta L, & E, duplex semper projectionis, & rotationis motus habebitur, & centrum gravitatis E in directum feretur per lineas directioni totius vis impressæ parallellas. Ita etiam in sphæra duplex motus unica vi obtineri poterit. Eruetur autem superioribus regulis LE, & data LE innotescet angulus, quem vis impressa cum radio sphæræ, ubi imprimitur, debet efficere directione sua, ut data emergat proportio velocitatis rotationis, & projectiones. In Jove ex. gr. erit angulus ipse 21^{o} $19'$, & in Terra $23'$ circiter.

SCHOLION.

Ope hujus theorematis, & alterius, quod parte prima dissertationis de vicissitudinibus Diurni motus *Propos. x.* demonstravimus, inveniri poterit motus, quem corpus quodlibet impressis viribus quibuscumque primo debet concipere. Diximus enim quod si corpori alicui binae vires imprimantur, quarum una circa unum axem, altera circa alterum singil-

latim

latim rotari inciperet, compositis simul viribus, & rotationibus, circa axem tertium totum corpus revolvetur, eruntque sinus deviationis novi axis a prioribus duobus reciproce proportionales velocitatibus, quas punctum aliquod in communi sectione duorum Æquatorum distinctis rotationibus præseferret. Id autem breviter ex eo deduximus quod in novo axe velocitates oppositae se destruant, in aliis vero punctis vires omnes componant velocitatem proportionalem distantiae ab axe ipso, & rectae ad axem ductae sua directione perpendicularem. Idem etiam theorema cum maxime implexis Physicae caelestis casibus aptaverimus, theoriae nimirum praecessionis Æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis, easque ipsas habuerimus aequationes, quae alia prorsus ratione ab Alembertio, atque Eulero fuerunt erutae, novum protulimus argumentum quod compositio motus non in liberis motibus dumtaxat, verum etiam in rotationis motibus locum habeat.

DE

PAULLI FRISII
DE
METHODO
FLUXIONUM GEOMETRICARUM,
ET EJUS USU IN INVESTIGANDIS PRÆCIPUIS CURVARUM AFFECTIONIBUS

DISSERTATIO.

DE

METHODO

FLUXIONUM GEOMETRICARUM.

PARS PRIOR.

MAgnitudines omnes Geometricae fluxu, & motu continuo gigni intelliguntur. Concipiamus enim punctum aliquod *B*, *fig.* 18., moveri ex *B* in *D*: motu suo designabit rectam *BD*. Concipiamus insuper rectam *BC* supra *BD* fluere, ut sibi in toto fluxu maneat parallella. Gignetur inde superficies *BO*: & si recta *BC* ejusdem longitudinis semper maneat, gignetur parallelogrammum, quod insuper erit rectangulum si rectus fuerit angulus duas inter rectas comprehensus. Quod si dum recta *BC* supra alteram fluit ipsum etiam fluat punctum *C*, & *BC* augeatur, aut imminuatur, infiniti casus diversi haberi poterunt. Fieri enim inprimis poterit quod incrementa omnia *mc*, *fig.* 19., dum spatio quolibet *BM* promovetur recta *BC* sint spatio ipsi proportionalia: quo in casu puncta *C*, *c* in eadem erunt recta *CT*, & triangulum designabitur. Si incrementa aut decrementa constantem proportionem ipsam non servent, linea *FCL* curva erit, convexa quidem, aut concava, hujus, aut illius naturæ pro varia puncti extremi *C* acceleratione, aut retardatione. Et qua ratione fluxu lineæ intelligitur superficiem quamcumque exsurgere, eadem potest intelligi gigni corpora ex fluxu superficiei. Ut si parallelo-

lellogrammum ſupra lineam rectam feratur motu ſibi ſemper parallello gignetur parallellepipedum, quod rectangulum erit, ſi parallellogrammum illud fuerit rectangulum perpendiculariter rectæ inſiſtens, atque inſuper evadet cubus ſi recta, & rectanguli latera inter ſe fuerint æqualia.

Pariter ſi rectangulum circa aliquod latus immobile revolvatur, revolutione abſoluta habebitur cylindrus. Si triangulum rectangulum circa latus alterutrum rotetur, prodibit conus: ſi ſemicirculus, ſemiparabola, ſemiellipſis &c, ſphæra, parabolois, ſphærois &c prodibit. Eodemque motu, quo lineas, ſuperficies, & ſolida cujuſcumque generis gigni concipimus, concipere etiam poſſumus lineas, ſuperficies, & ſolida determinatæ jam magnitudinis aut augeri, aut imminui. Ita ſi parallellogrammum $BCOD$ proponatur, *fig.* 18., & productis BD, BC in M, & N moveatur DO quidem ſupra DM, & CO ſupra CN tali ratione ut DO quantitate mo augeatur, & CO quantitate no; parallellogrammum $BCOD$ in majus quodlibet $BNoM$ abire poterit. Et ſi proponatur parallellepipedum MC, *fig.* 20., eodemque tempore TN ſupra NH, CN ſupra NP, BQ ſupra QR fluat; ut tria parallellepipedi latera MN, DN, NQ evadant MP, DH, NR, majus parallellepipedum obtinebitur. Generatim magnitudo quælibet $xzyt$ conflata ex magnitudinibus x, z, y, t inter ſe ductis, quæ motu continuo augeri, aut minui intelliguntur, ipſis creſcentibus aut decreſcentibus creſcet ſimiliter, aut decreſcet.

Hæc prima, & genuina eſt magnitudinum Geometricarum idea, quam ſummi antiquitatis Geometræ Euclides, Apollonius, & Archimedes ſuppeditarunt: Hanc poſteriore ſæculo Torricellius illuſtrare, atque extendere aggreſſus eſt. Extat enim ipſius epiſtola ad Galilæum, in qua de lineis curvis cum ageret, curvas omnes conſideravit veluti duobus motibus genitas, altero æquabili, altero accelerato. Tum etiam adnotavit quod ſi alicubi duorum motuum proportio exprimatur duobus parallellogrammi alicujus lateribus, diagonalis poſitionem tangentis determinabit. Exemplum dedit ſpiralis Archimedeæ, in cujus origine velocitates cum ſer-

vent

vent rationem radii ad peripheriam, semiordinata etiam spiralis se habet ad subtangentem ut radius ad peripheriam. Elucubraverat etiam Torricellius peculiare opus de lineis curvis, cujus fragmenta asservantur Florentiæ, & in quo methodum tradiderat ducendi tangentes plurium curvarum, inveniendi centrum gravitatis, quadrandi Helicem Archimedeam, metiendi solida curvarum revolutione circa axem, aut semiordinatam, atque in primis revolutione Logarithmicæ circa asymptotum genita &c. Quibus plane Geometra ingeniosissimus toti Fluxionum methodo propius accesserat, & nisi ipsum mors immatura præripuisset Litterariæ Reipublicæ, alia plura, & maxima inventa pollicebatur.

Iisdem fere temporibus Cavalerius Mediolanensis, quem Galilæus Archimedem alterum appellabat, semina quædam evolvere, atque explicare cæpit, quæ sparsim jecerat Galilæus ipse, potissimum in Dialogo primo, & secundo de Mechanica, & Motu locali. Nimirum magnitudines omnes Geometricas veluti ex infinitis partibus compositas consideravit Cavalerius, & novam indivisibilium theoriam Geometriæ addidit, & ejus ope plurima de Sectionibus Conicis, de spatiis Helicis, & solidis inde genitis prorsus nova, & singularia demonstravit. Illud autem in indivisibilium theoria durius, ac minus Geometricum occurrit quod lineæ ex infinitis punctis, ex infinitis lineis superficies, & solida ex infinitis superficiebus coalescere intelligantur. Quam difficultatem ipse etiam sensit author perspicacissimus, & quæ indivisibilium methodo eruerat, aliis demonstrationibus more veterum confirmavit. In præfatione insuper libri septimi animadvertit eodem modo omnia procedere etiamsi continuum spectetur veluti ex partibus non indivisibilibus coalitum: quo iis aditum aperivit, qui indivisibilibus evanescentia divisibilia substituendo voluerunt lineas componi ex infinitis lineolis, infinite parvis, & in infinitum divisibilibus, ex superficiebus superficies, & rursus ex aliis solidis solida.

Propositionum singularum demonstrationes in hypothesi indivisibilium obscuræ, implexæque sunt, ut sunt principia nascentium omnium facultatum. Torricellius methodum

Ca-

Cavalerii, sive, ut ipse vocat, immensum Cavalerianæ Geometriæ Oceanum ad breviorem, simplicioremque formam revocare caepit in libris de dimensione Parabolae, & Solidi Hyperbolici. Wallisius eamdem methodum calculo aptare studuit in Aritmetica infinitorum, & summationibus serierum infinitarum quadraturas curvarum, & solidorum dimensiones exhibuit. Verum cum inductione usus esset Wallisius, hoc Arithmeticæ genus Bullialdus postmodum more veterum, & maximis ambagibus demonstravit. Barowius eousque progressus est, ut triangulum curvæ, quod vocant characteristicum, considerando, ex differentia duarum semiordinatarum sese proxime consequentium tangentes curvarum ducere docuerit, quemadmodum in lectionibus Geometricis videre est. Attamen Barowii methodus eos tantum casus complectitur, in quibus semiordinata exprimitur potentia aliqua abscissae exponentis integri, & positivi. Quare eo perducta tunc temporis res erat ut ad differentialem calculum inveniendum unicus fere gradus superesset.

Newtonus in epistola ad Collinium data anno 1672 monuit se methodum Barowii & simpliciorem reddidisse, & aptavisse etiam ducendis tangentibus curvarum quarumcumque Geometricarum, Mechanicarumque, & inveniendis areis, longitudinibus, centris gravitatis, quomodocumque demum coordinatarum relatio surdis, & radicalibus quantitatibus exprimeretur. Exempla vero non alia exhibuit quam æquationum a radicalibus omnibus solutarum. Deinde in alia ad Oldemburgium anno 1676 data epistola Newtonus theorema binomii exposuit, & regulas divisionum, ac serierum infinitarum, quarum ope se invenisse dixit areas, & longitudines curvarum omnium, centrum gravitatis, contenta, & superficies solidorum, & segmentorum; quorumcumque. At rursus qua methodo, & ratione eousque pervenerit non aperuit, & exempla dumtaxat, quæ implicite methodum continent, suppeditavit. Cum Oldemburgius epistolam Leibnitio communicasset, rescripsit statim Leibnitius, & suum differentialem calculum explicavit, quem postmodum publici juris fecit in Actis Lipsiensibus anno 1684. Newtonus anno 1687 edito Principiorum

rum Mathematicorum opere suam methodum undique exposuit, & potissimum in *lem.* 2. *lib.* 2. nitide tradidit.

Hæc igitur de inventore differentialis calculi, & methodi fluxionum controversia eo deducta censeri potest, ut, cum Newtono inventionis laus denegari nequeat, Leibnitium simul differentialem calculum invenisse censendum sit, aut potius quadraginta fere annorum studio crevisse paulatim methodum ipsam in Italia primum prognatam, promotamque in Anglia a Wallisio, & Barowio, ac denique a Newtonno, & Leibnitio ad summum apicem perductam. Hi vero diversimode fluxionum, & differentialium theoriam exposuerunt. Leibnitius inprimis cum quantitates non ex indivisibilibus, sed ex divisibilibus evanescentibus consurgere intelligeret, diversos infinite parvorum ordines constituit, & infinite parva consideravit veluti differentias finitarum quantitatum. Deinde cum circa hos ordines infinite parvorum difficultates nescio quas Metaphysicas sentiret, infinite parvis incomparabiliter, sive indefinite parva substituit. Newtonus varios quantitatum ordines agnovit, quarum aliæ præ aliis possent negligi, ut potissimum ex scholio *Propos.* 93. *Lib.* 1., atque ex primo exemplo *Propos.* 10. *Lib.* 2. *Princip. Mathem.* colligitur. Ipso etiam exemplo satis indicavit, se non primas tantum fluxiones, sive prima differentialia, ut perperam nonnulli censent, agnovisse, sed alia insuper omnia inferiorum ordinum. Cum enim curvæ æquationem in infinitam seriem convertisset, monuit primo seriei termino semiordinatam exprimi, secundo determinari positionem tangentis, tertio angulum contactus, seu curvaturam, quarto variationem curvaturæ, quinto variationem variationis, & sic deinceps.

Newtonus autem quantitates Mathematicas non ex partibus quam minimis compositas, sed motu continuo descriptas consideravit, lineas ex. gr. non per appositionem, sed motum continuum punctorum, superficies motu linearum, & motu superficierum solida, angulos rotatione laterum &c: nec quidem summas, aut rationes quantitatum determinatarum, sed summarum, & rationum limites spectavit, quibus scili-

cet

cet quantitates primo nafcuntur, & ultimo evanefcunt. Hæc ipfe fingillatim explicavit *fect.* 1. *Princip.*, quæ de methodo rationum primarum, ultimarumque infcribitur. Lemma etiam fecundum *lib.* 2. fic effertur: ***Momentum genitæ æquatur momentis laterum generantium in eorumdem laterum indices dignitatum, & coefficientia continue ductis.*** Denique opufculi de methodo Fluxionum, quod anno 1736 Londini editum eft, duo illa funt problemata: ***data relatione quam invicem habent fluentes quantitates, determinare relationem, quæ inter earum fluxiones intercedit: data relatione, quæ contineat quantitatum fluxiones, invenire quam relationem habeant inter fe hæ quantitates fluentes.*** Ita vir fagaciffimus prima Geometrarum veterum principia, quæ Torricellio adeo arriferant, excoluit, perfecitque.

Totam fluxionum Geometricarum Theoriam Mac-Laurinus integro opere complexus eft, in quo & magnitudinum genefim ex motu continuo derivavit, & nulla habita infinite parvorum ratione abftrufiores magnitudinum proprietates more Mathematicorum veterum inveftigavit, & Geometrico rigore, atque ordine. Illud in prima parte fuæ de Fluxionibus tractationis moleftum videri folet, quod fingularum propofitionum demonftrationes longiores fint: quo fit ut in ipfis perfequendis defatigati nimium Tyrones abfolvendi operis ftudium in ipfo limine abjiciant. Huic ego incommodo ut occurrerem, ante annos novem differtationem quamdam de Methodo Fluxionum Geometricarum Mediolani Tyronum beneficio in lucem edidi, eaque ratione expofui theoriam continui motus ut & brevitati fimul, & feveritati Geometricæ confultum effet. Idipfum fere eodem tempore in Anglia præftitit Clariffimus Simpfonius illuftri opere ***the doctrine and application of fluxions.*** En modo primam illam differtationem ad ampliorem formam redactam, inveniendifque omnibus Curvarum Algebricarum affectionibus accomodatam.

DEFINITIO PRIMA.

Magnitudines, quæ motu continuo, ut supra, gigni, augeri, aut minui intelliguntur, dici solent magnitudines fluentes, & dum magnitudinibus quibuscumque datis augentur, aut imminuuntur, dicuntur fluere. Quare *B O* rectangulum fluens est, fluit vero dum lateribus motis ut antea abit in rectangulum *Bo*.

DEFINITIO SECUNDA.

Si magnitudo aliqua æquabiliter fluat, hoc est eadem constanti semper celeritate, celeritas ipsa, qua fluit, dicitur fluxio prima, aut simpliciter fluxio propositæ magnitudinis. Ex. gr. dum latus *B D* æquabiliter crescit usque in *B M*, celeritas, qua crescit, dicitur lateris ipsius fluxio.

DEFINITIO TERTIA.

Quod si velocitas puncti extremi *D* non maneat constanter eadem, sed æquabiliter augeatur, vel imminuatur, æquabilis ipsa celeritas, qua augeri, vel minui intelligitur, dicitur fluxio secunda lineæ *BD*. Ex. gr. velocitas puncti *D* exponatur linea *GH*, quae jam aequabiliter crescat, aut decrescat puncto extremo *H* æquabiliter moto versus *N* in priore casu, & versus *G* in casu altero velocitas puncti *H* dicitur fluxio secunda lineae fluentis *BD*.

DEFINITIO QUARTA.

Quod si crescens, aut decrescens velocitas lineæ *BD* non crescat, aut decrescat æquabiliter, hoc est ipsa etiam velocitas puncti *H* non maneat constanter eadem, sed æquabiliter augeatur, vel imminuatur; constans velocitas, qua augetur, vel imminuitur dicitur fluxio secunda lineæ *GH*, & fluxio tertia lineæ *BD*. Atque ita porro fluxiones quartæ,

quintæ &c dicentur velocitates, quibuscum crescent, aut imminuentur æquabiliter fluxiones tertiæ, quartæ &c.

Definitio Quinta.

Si in curva aliqua FCL, *fig.* 19., accipiantur binæ semiordinatæ BC, Mo infinite inter se proximæ, ut scilicet differentia omnis mo ut infinite parva censeri possit, & semiordinatæ ipsæ veluti inter se æquales; vocabitur mo differentiale semiordinatæ BC, Co differentiale arcus FC, & $BCoM$ differentiale areæ FCB, quatenus scilicet infinitesimis his quantitatibus binæ se subsequentes semiordinatæ, bini arcus, & binæ areæ differant inter se.

L E M M A.

Si magnitudo aliqua inæquabiliter fluat, prima ipsius fluxio pro instanti quolibet temporis metiri debet ex spatio, quod dato aliquo tempore absolvi posset, si eodem instanti fluxus in æquabilem converteretur.

Statuamus enim continui motus crescentem, aut decrescentem velocitatem dato aliquo instanti temporis esse A. Si fluxus omnis evaderet deinde æquabilis, eademque invariabili velocitate A prosequeretur per datum tempus, velocitas eadem A foret percurso spatio proportionalis. Itaque etiam si fluxus evadat postmodum inæquabilis, & velocitate successive aucta, vel imminuta majus vel minus spatium absolvatur; velocitas fluxus proportionalis erit spatio, quod æquabiliter dato aliquo tempore absolvi posset.

Corollarium Primum.

Si punctum D rectæ BD æquabiliter fluat, *fig.* 18., æqualibusque temporibus absolvat semper idem spatium DM, exponet ipsa DM velocitatem puncti D, & primam fluxionem rectæ BD. Ergo etiam si punctum D fluat inaequabiliter, fluxio rectae BD exponetur semper spatio DM,

quod

quod dato tempore absolvi posset si motus omnis in puncto D ad æquabilem reduceretur.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Pariter si in rectangulo BO latus idem DO supra BDM fluat, & rectangulum OM illud sit quod dato aliquo tempore a recta DO, eadem velocitate fluxus, quam in D habet, aequabiliter describeretur, erit pro casu quolibet rectangulum ipsum OM prima fluxio rectanguli totius BO, cujus latus unum DO sit constans.

THEOREMA PRIMUM.

Si rectilinea quaevis figura FCB, *fig.* 19., fluat, & tangens AC ducatur, & sit Mo parallella ipsi BC, & Cm parallella axi FB, atque insuper fluxio axis FB repraesentetur recta BM; dico quod Cc erit fluxio arcus FC, & mc fluxio semiordinatae BC.

DEMONSTRATIO.

Fluxio enim arcus, & semiordinatae, quo tempore axis FB aequabiliter fluendo augetur spatio BM, exhibebitur eo spatio, quo arcus, & semiordinata augeri possent si velocitas puncti C eadem immutabiliter permaneret. Patet autem quod punctum C motum suum, quem in C, habet, æquabiliter continuando, post finem dati ipsius temporis, reperiri debet alicubi in tangente AC. Rursus punctum C in semiordinata BC esse debet, quæ supra axem FB fluendo augetur, aut imminuitur. At in fine illius temporis, quo æquabiliter fluendo axis FB portione BM augetur, semiordinata BC in Mo transire debet. Tum igitur punctum C, continuato æquabiliter motu, quem primo habebat, reperiri debet alicubi in recta Mo, & tangente AC, sive in communi interfectione c: adeoque Cc est fluxio arcus FC, & mc fluxio semiordinatæ BC. Q. E. D.

S 2 Co-

Corollarium Primum.

Si curva versus axem sit concava, tangens AC ultra curvam jacebit, & magnitudo cm, quæ semiordinatæ primam fluxionem exprimet major erit magnitudine mo, qua vere semiordinata ipsa augetur. Celeritas igitur, qua semiordinata in hoc casu fluet, decrescet successive, hoc est semiordinata fluet motu retardato. Si curva ad axem convexa sit, magnitudo, quæ semiordinatæ fluxionem exprimet, ab ea deficiet, qua vere crescet: hoc est semiordinata fluet motu accelerato. Si curva abeat in lineam rectam, & coincidat cum tangente, fluxus erit æquabilis, ut antea notatum est.

Corollarium Secundum.

In primo casu quia celeritas fluxus, seu prima fluxio semper decrescet, necesse erit ut ipsius fluxio, scilicet fluxio secunda semiordinatæ sit negativa. In casu altero positiva erit. Dignoscetur igitur utrum curva aliqua, quæ proponitur, ad axem concava, vel convexa sit, ex quo secunda semiordinatæ fluxio sit negativa, vel positiva.

Corollarium Tertium.

Si fiat $FB=x$, $BC=y$, & prima abscissæ fluxio BM vocetur de more dx, & dy prima fluxio semiordinatæ, erit $mc=dy$, & $Cc=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Tum etiam si secunda semiordinatæ fluxio vocetur ddy, concava, aut convexa erit curva, prout ddy in æquatione aut negativum, aut positivum valorem obtinebit.

THEOREMA SECUNDUM.

Iisdem positis dico quod areæ totius FCB fluxio metiri debet ex facto semiordinatae BC in fluxionem axis BM, sive ex rectangulo CM.

De-

DEMONSTRATIO.

Per *defin.* 2. fluxio areæ *FCB* eſt continui motus velocitas, qua augeri, aut minui intelligitur. Velocitas per antecedens lemma metiri debet ex ſpatio, quod fuiſſet genitum ſi quo tempore axis *FB* fluit, & motu uniformi augetur ſpatio *BM*, areæ etiam totius fluxus idem continuaretur, qui primo incæpit. Jam vero quo tempore area fluere incipit, ſemiordinata *BC* moveri incipit ſupra *BM*. Fluxio igitur metiri debet ex ſpatio, quod fuiſſet genitum, ſi ſibi æqualis ſemper, & parallella ſemiordinata eadem *BC* motum ſuum ſupra *BM* proſecuta eſſet, ſive ex rectangulo *CM*. Q. E. D.

Similis eſt demonſtratio ſi area non fluat, ſed refluat, & rectangulum *CM* fiat negativum.

COROLLARIUM PRIMUM.

Et quidem cujuſcumque generis ſit curva propoſita, dummodo ſemiordinata *BC* terminetur, & axis dato tempore portione *BM* augeatur, erit ſemper prima areæ fluxio æqualis rectangulo ex *BC* in *BM*, ſcilicet retentis iiſdem denominationibus, quæ ſupra, erit areæ fluxio $= y\,dx$, quæcumque demum ſit coordinatarum y, x relatio.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si duarum magnitudinum ſe conſequentium differentia accipiatur, erunt *Co*, *mo*, & *CoMB* differentialia arcus *FC*, ſemiordinatæ *BC*, & totius areæ *FCB*, nec niſi proxime pro ipſis differentialibus aſſumi poterunt *Cc*, *mc*, & *CM*: quatenus ſcilicet ſi puncta *C*, *c* infinite proxima intelligantur, erit *cm* infinite parva reſpectu *CB*, & *co* infinite parva reſpectu *cm*.

Co-

COROLLARIUM TERTIUM.

Hinc patet methodum Leibnitii, Hospitalii, Wolfii, aliorumque, quam vocant differentialem, & qua magnitudinum propositarum differentiæ eodem modo æstimantur, quo mox fluxiones metiri diximus, approximationis methodum dumtaxat esse. In considerandis autem fluxionibus nullæ sunt quantitates, quæ veluti infinitesimæ alterius ordinis negligantur.

THEOREMA TERTIUM.

Si bina latera CO, DO rectanguli BO fluant, *fig.* 18., & lateris CO, seu BD fluxio sit DM, CN vero sit fluxio alterius lateris; dico quod rectanguli totius fluxio metienda erit rectangulis ex CO in CN, & DO in DM.

DEMONSTRATIO.

Compleatur rectangulum $B\,M\,o\,N$, & per puncta O, o ducatur recta, quæ latus BD secet in P. Dividetur rectangulum omne in triangulum POD, & trapetium $BPOC$. Abibit autem rectangulum $B\,O$ in $B\,O$, quod triangulum POD in PoM abeat, & trapetium $B\,P\,O\,C$ in $B\,P\,o\,N$. Itaque rectanguli totius fluxio æquabitur duabus simul fluxionibus trianguli, & trapetii, sive per *Coroll.* 1. *Theor.* 2. duobus rectangulis ex DO in DM, & CO in CN. Si fiat $DO = u$, $CO = v$, $DM = dv$, $CN = du$, erit rectanguli, seu producti vu fluxio $= v\,du + u\,dv$. Q. E. D.

COROLLARIUM PRIMUM.

Quoniam igitur producti fluxio æquatur fluxioni lateris uniuscujusque in latus alterum ductae, vicissim si productum vocetur z, ut sit $v = \frac{z}{u}$, fiet $u\,dv + v\,du = dz$, & inde erue-

eruetur $dv = \frac{dz - n dv}{n} = \frac{n dz - z dn}{n^2}$: scilicet fracti cujuscumque $\frac{z}{n}$, aut v fluxio æqualis erit differentiæ factorum ex fluxionibus numeratoris in denominatorem, & denominatoris in numeratorem per denominatoris ipsius quadratum divisorum.

Corollarium Secundum.

Si manente triangulo *POD* latus *Mm* rectanguli *MO* portione *mo* aequabiliter augeatur, & latus *Om* perpendiculariter moveatur supra *mo*, hoc est si ipsum etiam rectangulum *MO* fluat; ipsius fluxio erit rectangulum Omon, per *Coroll.* 1. *Theor.* 2. Itaque Omon fluxionem fluxionis exprimet, sive secundam fluxionem trianguli *P O D*. Exprimet etiam fluxionem secundam trapetii *B P O Ç*, & tota secunda fluxio rectanguli *B O* erit $= 2\,du . dv$.

Corollarium Tertium.

Si bina rectanguli latera æquentur inter se, & laterum fluxiones pariter sint aequales, aequalia fient rectangula *O M*, *O N*, & quadrati totius prima fluxio metietur duplo rectangulo *O M*, sive erit $= 2\, v\, dv$, secunda vero $= 2\, dv^2$. In accipienda igitur prima fluxione utrobique omittitur Omon, non quod sit quantitas infinite parva respectu *O M*, quemadmodum juxta principia differentialis calculi statuendum esset, sed quod ad secundam fluxionem ipsius *B O* pertineat.

THEOREMA QUARTUM.

Si parallelepipedi *MÇ*, *fig.* 20., latus unum *M N*, aut duo *M N*, *D N*, aut tria simul *M N*, *D N*, *N Q* fluant aequabiliter, augeanturque singula rectis *N P*, *N H*, *Q R*; fluxio totius parallelepipedi metietur in primo casu parallelepipedo ex *D Q* in *N P*, in secundo autem duobus ex *D Q* in

in NP, & MQ in NH, in tertio demum tribus ex DQ in NP ex MQ in NH, & BQ in QR.

Demonstratio.

Quippe si ex una dumtaxat parte fluat parallellepipedum, primo planum DQ moveri incipiet supra NP: quo dato ex principiis superioribus sequitur parallellepipedi totius fluxionem metiendam esse ex eo, quod gigneretur si planum idem DQ motum suum supra NP aequabiliter continuaret ut primo incaepit, sive ex parallellepipedo baseos DQ, & altitudinis NP. Eodem modo ostendentur aliae propositionis partes. Possent etiam derivari omnia ex tertio Theoremate. Sint tria parallellepipedi latera v, u, t, & respectivae laterum fluxiones dv, du, dt. Fiat $vu = z$, & totum parallellepipedum $= zt$. Erit juxta ipsam propositionem fluentis zt fluxio $= zdt + tdz = vudt + tdz$. Jam vero, ob $z = vu$, erit etiam $dz = vdu + udv$. Erit itaque parallellepipedi totius fluxio $= vudt + tvdu + tudv$. Q. E. D.

Corollarium Primum.

Eadem ratione si proponatur magnitudo aliqua $avuts$, ex facto constantis a, & laterum fluentium v, u, t, s genita, & fiat $vu = z$, per hanc ipsam propositionem evadet fluxio $= aztds + azsdt + atsdz = avutds + avusdt + avtsdu + autsdv$. Et si lateribus u, & s continuo motu crescentibus, alia v, & t decrescant, horum fluxiones fient negativae $-dv$, $-dt$, & tota magnitudinis prioris fluxio erit $avutds - azsdt + avtsdu - autsdv$. Generatim magnitudinis compositae cujuscumque fluxio erit factum ex respectivis laterum singulorum fluxionibus in productum aliorum laterum, & coefficientes omnes multiplicatis.

Co-

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si latera omnia parallellepipedi aequentur inter ſe, & ex parallellepipedo fiat cubus, erit fluxio $= 3\ v^2\, d\, v$. Erit etiam magnitudinis $a v^4$ fluxio $= 4 a v^3\, dv$, & generatim magnitudinis $a v^m$ fluxio $= m a v^{m-1}\, dv$. Pariter cum magnitudinis $a x + x^2$ fluxio eſſe debeat $= a dx + 2 x dx$, erit fluxio magnitudinis $(a x + x^2).(a x + x^2)$, ſive $(a x + x^2)^2 = 2.(a x + x^2).(a dx + 2 x dx)$. Fluxio etiam magnitudinis $(a x + x^2)^3$ erit $= 3.(a x + x^2)^2.(a dx + 2 x dx)$, & generatim magnitudinis $(a x + x^2)^m$ fluxio erit $= m(a x + x^2)^{m-1}.(a dx + 2 x dx)$. Generatim igitur fluxio quantitatis cujuſcumque ſimplicis, aut compoſitae, ad poteſtatem quamlibet elevatae, aequabitur facto exponentis, coefficientium, fluxionis lateris, & lateris ipsius ad poteſtatem unitate minorem elevati.

COROLLARIUM TERTIUM.

Idem erit theorema ſi exponens poteſtatis non integer ſed fractus ſit. Proponatur ex. gr. quantitas $(a x + x^2)^{\frac{3}{2}}$, quae fiat $= Z$, ut ſit $(a x + x^2)^3 = Z^2$. Quia aequalium fluentium aequales etiam fluxiones eſſe debent, erit $3.(a x + x^2)^2 (a dx + 2 x dx) = 2 Z dZ$: unde aequationem per $2 Z$, ſive per $2 (a x + x^2)^{\frac{3}{2}}$ dividendo, fiet quaeſita fluxio $dZ = \frac{3}{2} (a x + x^2)^{\frac{1}{2}}.(a dx + 2 x dx)$. Pariter quantitatis $(xy + y^2)^{\frac{2}{3}}$ fluxio erit $= \frac{2}{3}(xy + y^2)^{-\frac{1}{3}}.(x dy + y dx + 2 y dy)$, & generatim quantitatis $(a x + y^2)^{\frac{m}{n}}$ fluxio erit $= \frac{m}{n}(a x + y^2)^{\frac{m-n}{n}} (a dx + 2 y dy)$.

Corollarium Quartum.

Perinde erit etiam ſi exponens poteſtatis ſit negativus. Proponatur ex. gr. quantitas ax^{-m}, quæ fiat $= X$, ut prodeat $a = x^{m} X$. Quia conſtantium quantitatum fluxio nulla eſt, ſumptis fluxionibus prodibit $mx^{m-1} X dx + x^{m} dX = 0$, & inde eruetur $dX = -max^{-m-1} dx$. Generatim quantitatis $(ay + x^{2})^{-m}$ fluxio erit $= -m.(ay+x^{2})^{-m-1}(ady+2xdx)$ $= -\frac{m(ady + 2xdx)}{(ay + x^{2})^{m+1}}$. Ita generale erit Corollarii ſecundi theorema.

Corollarium Quintum.

Hoc etiam poſito cum fracti $\frac{1}{(a+x)^{m}}$ fluxio ſit $= \frac{-mdx}{(a+x)^{m+1}}$, & per *Coroll.* 1. *Theor.* 3. fracti cujuſcumque $\frac{z}{u}$ fluxio ſit $= \frac{udz - zdu}{u^{2}}$, erit fluxio compoſitæ fractionis $\frac{cz}{(a+x)^{m}} = \frac{(a+x)^{m} cdz - mcz.(a+x)^{m-1} dx}{(a+x)^{2m}}$. Quare generatim perſpicitur quomodo facti, potentiæ, & quoti cujuſcumque fluxio fumenda ſit.

Corollarium Sextum.

Et qua lege invenitur fluxio propoſitæ fluentis cujuſcumque, eadem etiam inveniri poterit ſecunda fluxio, ſi prima conſideretur veluti fluens, & fluxio tertia, ſi ſecunda pariter fluat &c. Sit enim ddx ſecunda fluxio quantitatis incomplexæ x. Erit quantitatis complexæ $(a-x)^{\frac{3}{2}}$ prima fluxio $= -\frac{3}{2}(a-x)^{\frac{1}{2}} dx$, & ſecunda $= \frac{3}{4}(a-x)^{-\frac{1}{2}} dx^{2} - \frac{3}{2}$

(a

$(a-x)^{\frac{1}{2}} ddx$. Pariter quantitatis ax^2y^3 fluxio secunda erit $=2ay^3dx^2+2axy^3ddx+12axy^2dxdy+3ax^2y^2ddy+6ax^2ydy^2$. Ita etiam eruentur fluxiones tertiae, & aliae omnes in infinitum.

COROLLARIUM SEPTIMUM.

Si incomplexae quantitatis x, aut y secunda fluxio nulla sit, hoc est si x, aut y fluat æquabiliter, in accipiendis secundis fluxionibus quantitatum complexarum nihilo æquandi erunt termini, in quibus occurret ddx, aut ddy. Ita si sit $ddx=o$, erit $\frac{3}{4}(a-x)^{-\frac{1}{2}}dx^2$ secunda fluxio quantitatis $(a-x)^{\frac{3}{2}}$

THEOREMA QUINTUM.

Si Hyperbola *MGF* ad asymptotos *AN*, *AD* referatur, *fig.* 21., & sit latus potentiæ hyperbolæ $AB=AE$, erunt primo areæ *BF*, *BR* abscissarum *AC*, *AT* logarithmi, & fluxio areæ cujuscumque æquabitur fluxioni illius abscissæ, cujus est logarithmus, ductæ in latus potentiæ hyperbolæ, & per abscissam ipsam divisæ.

DEMONSTRATIO.

Fingantur duæ semiordinatæ *CF*, *TR* ea lege supra asymptotum *AN* fluere, ut abscissa unius sit semper potestas eadem n abscissæ alterius, & fiat $AB=a$, $BC=x$, $AC=a+x$, adeoque $AT=(a+x)^n$. Erit $CF=y=\frac{a}{a+x}$, $RT=\frac{a}{(a+x)^n}$, & per *Coroll.* 1. *Theor.* 2. erit fluxio areæ $BF=ydx=\frac{adx}{a+x}$, & fluxio areæ $BR=\frac{a}{(a+x)^n}.n(a+x)^{n-1}dx$

$=na$

$= \frac{nadx}{a+x}$. Velocitates igitur, quibus ſemiordinatæ in locis ſingulis fluent, & areæ totæ BF, BR velocitatibus iiſdem genitæ proportionales erunt exponentibus, 1, n abſciſſarum AC, AT. Sunt autem logarithmi ut exponentes poteſtatum, quarum ſunt logarithmi. Erunt igitur areæ abſciſſarum logarithmi, & areæ cujuſcumque fluxio erit fluxio ipſa abſciſſæ, cujus eſt logarithmus, ducta in latus potentiæ hyperbolæ, & per abſciſſam eamdem diviſa. Q. E. D.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si producatur CF in H ut ſit HC æqualis areæ hyperbolicæ BF per latus AB diviſæ, & ducatur HL parallella aſymptoto AN, puncta omnia H deſignabunt Logarithmicam BQ, in qua abſciſſæ LA erunt logarithmi ſemiordinatarum LH, ſive in qua abſciſſis æquabiliter creſcentibus, ſemiordinatæ creſcent proportionaliter. Pariter erit Ap logarithmus ſemiordinatæ Q, ſive $AB - BT$, vel areæ hyperbolicæ $ADMT$ per AB diviſæ: quæ, quoniam jacet ex parte oppoſita prioris areæ, negativa erit, & BA accepta pro unitate, ſemiordinatis Logarithmicae unitate minoribus reſpondebit.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Quia hyperbolae MGF oppoſita mgf reſpondet, ſi hujus area eodem modo inquiratur, deſcribetur alter logarithmicae ramus hbq eodem axe Lp praeditus, iiſdemque abſciſſis AL, Ap, & ſemiordinatis negativis Lh, pq. Erit enim $Ab = -a$, $bc = -x$, $Ac = -a - x$, $cf = -y = \frac{a}{-a-x}$: quae quantitas ducta in fluxionem abſciſſae $-dx$, dabit fluxionem areæ $\frac{adx}{a+x}$ prorſus ut antea. Haec attigiſſe obiter ſufficiat, ut pateat, quod primo Bernoullius aſſeruerat, duos eſſe ramos Logarithmicæ. Qui circa quantitates eidem Logarithmo re-

respondentes plura desideret, adeat imprimis Cl. Walmesley opusculum, quod Actis Berolinensibus anno 1755 insertum est.

COROLLARIUM TERTIUM.

Si fiat $a + x = z$, adeoque $dx = dz$, erit fluxio logarithmi quantitatis $z = \frac{a\,dz}{z}$: æqualis scilicet fluxioni dz per z divisæ, & ductæ in latus potentiæ hyperbolæ, quod etiam modulus logarithmorum dicitur. Si z minor sit quam a, & fiat $= a - x$, fluxionem logarithmi habebit $= -\frac{a\,dz}{z}$: idem scilicet erit theorema, & dumtaxat abscissae Ap negative accipiendae erunt. Si logarithmorum modulus sit $= 1$, erit logarithmi fluxio in primo casu $\frac{dz}{z}$, & $-\frac{dz}{z}$ in casu altero.

COROLLARIUM QUARTUM.

Hoc etiam posito inveniri poterit fluxio logarithmi, qui respondeat quantitati cuicumque compositæ $x^2 + b^2$. Nam si logarithmorum modulus sit a, erit, per *Coroll.* 3. *Theor.* 3., $\frac{a\,dz}{z} = \frac{2axdx}{x^2 + b^2}$. Erit pariter $\frac{abdx + 2axdx}{bx + x^2}$ fluxio logarithmi quantitatis $bx + x^2$, & $\frac{2a^2\,dz}{a^2 - z^2}$ erit fluxio logarithmi quantitati $\frac{a + z}{a - z}$: quod idem valet de cæteris.

COROLLARIUM QUINTUM.

Quod si proponatur quaepiam variabilis z ad potestatem x elevata, sive, ut vocat Johannes Bernoullius, percurrens aliqua, & exponentialis quantitas, & fiat $z^x = t$, ut juxta logarithmorum regulas evadat $x.\,log.\,z = log.\,t$; datis logarithmorum fluxionibus dabitur etiam propositae quantita-
tis

tis fluxio. Nam ſi logarithmorum modulus ſit $= 1$, erit $\frac{x\,dz}{z} + log.\, z\, .\, dx = \frac{dt}{t}$, adeoque $dt = \frac{xt\,dz}{z} + t\, .\, log.\, z\, .\, dx = x z^{x-1}\, dz + z^{x}\, .\, log.\, z\, .\, dx$. Erit etiam $a^{x}\, dx\, .\, log.\, a$ fluxio quantitatis exponentialis a^{x}.

THEOREMA SEXTUM.

Si aequationis alicujus utcumque ex variabilibus, & conſtantibus quantitatibus conflatae accipiatur fluxio, multiplicantur ſinguli aequationis termini per ſeriem Arithmeticam.

DEMONSTRATIO.

In primis ſi æquatio aliqua $x^3 + a x^2 + b^2 x + c^3 = 0$ unam variabilem complectatur, per ſuperiores regulas evadet fluxio $= 3 x^2 dx + 2 a x dx + b^2 dx = x^3 . \frac{3dx}{x} + ax^2 . \frac{2dx}{x} + b^2 x . \frac{dx}{x} + c^3 . 0$. Idem bis fieri debet ſi binæ in æquatione adſint variabiles, & ſecundum utriuſque exponens bis æquatio ordinetur. Ita æquationis $a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + m y^3$ fluxio evadet $= a x^3 . \frac{3dx}{x} + b x^2 y . \frac{2dx}{x} + c x y^2 . \frac{dx}{x} + m y^3 . 0 + m y^3 . \frac{3dy}{y} + c x y^2 . \frac{2dy}{y} + b x^2 y . \frac{dy}{y} + a x^3 . 0 = 3 a x^2 dx + 2 b x y dx + c y^2 dx + 3 m y^2 dy + 2 c x y dy + b x^2 dy$. Valet idipſum de aliis quibuſcumque æquationibus, ſive termini aliqui deficiant, ſive non. Q. E. D.

COROLLARIUM PRIMUM.

Quia juxta notum Huddii theorema, cujus demonſtrationem primo exhibuit Saurinus, ſi æquatio æqualium radicum quarumcumque per ſeriem Arithmeticam multiplicetur in æquationem aliam abibit, quæ unam minus radicum aequa-

qualium continebit, & quæ adhuc unam minus continebit æqualium radicum si multiplicetur rursus per aliam seriem Arithmeticam; atque ita porro quousque radices omnes æquales multiplicationibus hujusmodi sublatæ sint, tunc enim termini, qui ex multiplicatione ultima emergent, non erunt amplius nihilo æquales; patet idipsum quoque obtineri si prima, secunda &c æquationis fluxio accipiatur.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si x, & y in æquatione binos valores habeant inter se æquales, & utrisque indeterminatis habitis pro fluentibus accipiatur prima fluxio æquationis; quæ emerget quantitas unam minus radicum æqualium continebit, & erit simul nihilo æqualis. At si secunda accipiatur fluxio, prodeuntes termini nullam amplius complectentur ex radicibus ipsis æqualibus, nec simul omnes se destruent. Pariter si tres habeantur in æquatione aliqua indeterminatarum valores inter se æquales tribus fluxionibus acceptis radices omnes æquales eliminari ex æquatione poterunt, & qui emergent termini non amplius poterunt nihilo simul exæquari.

COROLLARIUM TERTIUM.

Quod si x quidem in æquatione plures obtineat valores inter se æquales, y vero non nisi unicum eumdem valorem habeat, & x dumtaxat pro fluente accipiatur; sumptis duabus, tribus &c fluxionibus æquationis tollentur duæ, tres &c ex iis radicibus æqualibus: omnibus autem radicibus eliminatis, qui supererunt termini non amplius simul destruentur. Idipsum fiet si x unicum, & plures y valores habeat inter se æquales, atque ita accipiatur æquationis totius fluxio, ut dumtaxat y pro fluente, & x pro constante quantitate consideretur.

SCHOLION.

Inde etiam totius calculi fluentium elementa facili ratione Tyro comparare sibi ipsi poterit. Patent enim conversæ omnes propositiones. Et primo quidem ex *Theor.* 3., & 4. manifestum est quantitatis $v\,du + u\,dv$ fluentem esse rectangulum $v\,u$, & quantitatis $vudt + tudv + tvdu$ fluentem esse parallelepipedum $v\,u\,t$: quo modo corollarium primum utriusque Theorematis pariter converti potest. Deinde ex *Coroll.* 2. 3. & 4. *Theor.* 4. consequitur facti cujuslibet ex fluxione lateris, & potestate lateris aliqua fluentem esse latus ipsum propositum ad potestatem exponentis unitate aucti elevatum, ductumque in coefficientes omnes, & novo ipso exponente postea divisum: scilicet fluxionum $x^{\frac{m}{n}}\,dx$, $\frac{m}{n}(ax + y^2)^{\frac{m-n}{n}}(adx + 2ydy)$, $-max^{m-1}dx$ fluentes erunt $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$, $(ax + y^2)^{\frac{m}{n}}$, $\frac{a}{x^m}$. Denique ex *Theor.* 5. præsto est, quod si aliqua habeatur fractio, cujus numerator sit fluxio denominatoris in quantitatem constantem ducta, fractionis fluens erit logarithmus denominatoris per quantitatem ipsam constantem multiplicatus, & per logarithmorum modulum divisus. Ita posito modulo $= 1$, quantitatis $\frac{2xdx}{a^2 + x^2}$ fluens erit *log.* $(a^2 + x^2)$, & quantitatis $\frac{xdx}{a^2 + x^2}$ fluens $\frac{1}{2}$ *log.* $(a^2 + x^2) =$ *log.* $\sqrt{(a^2 + x^2)}$.

Illud dumtaxat observare debent Tyrones quod cum magnitudinum constantium fluxio nulla sit, & non minus magnitudinis x^m quam $x^m \pm a^m$ fluxio sit $mx^{m-1}dx$, vicissim fluxiones $mx^{m-1}dx$ fluens esse poterit non minus x^m quam $x^m \pm a^m$. Universim igitur fluenti inventæ adjicienda erit quantitas quæpiam constans C, ut ex. gr. fluxionis $2xdx\sqrt{(a^2 + x^2)}$ fluens completa sit $\frac{2}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C$. Valor

con-

constantis quantitatis ex peculiaribus Problematum conditionibus determinari poterit. Ut si fluxionis propositæ fluens nulla esse debeat posito $x = o$, erit $\frac{2}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}a^3 + C = o$, & inde eruetur $C = -\frac{2}{3}a^3$, & erit completa fluens $= \frac{2}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}a^3$. Contra quia quantitatis $\frac{3}{2}(ax + x^2)^{\frac{1}{2}}(adx + 2xdx)$ fluens tota $(ax + x^2)^{\frac{3}{2}}$ fit $= o$ ubi est $x = o$, nulla ipsi quantitas constans addenda erit.

Patet autem infinitos casus haberi posse, qui prioribus tribus fluxionum classibus non complectantur. Et quidem sæpe æquationes ad classes ipsas substitutione aliqua reduci possunt. Accidit id primo ubi variabilis sub signo radicali posita unius dimensionis est, & quæ extra signum reperitur potestas ipsius variabilis sit exponentis positivi. Si enim proponatur $xdx\surd(a + x)$, & fiat $a + x = z$; erit $xdx\surd(a + x) = z^{\frac{3}{2}}dz - az^{\frac{1}{2}}dz$: cujus fluens juxta superiores regulas prodit $= \frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}az^{\frac{3}{2}}$. Deinde ubi variabilis sub signo radicali secundam dimensionem non superet. Ita si proponatur fluxio $\frac{a^2dx}{x\surd(ax + x^2)}$, & fiat $\surd(ax + x^2) = \frac{zx}{b}$, adeoque $x = \frac{ab^2}{z^2 - b^2}$, $\surd(ax + x^2) = \frac{abz}{z^2 - b^2}$ $dx = \frac{-2ab^2zdz}{(z^2 - b^2)^2}$, prodibit $\frac{a^2dx}{x\surd(ax + x^2)} = -\frac{2adz}{b}$. Iisdem semper substitutionibus fluxionum reductio habebitur si occurrat quantitas radicalis $\surd(ax - x^2)$, aut $\surd(x^2 - ax)$. Si occurrat radicalis quantias $\surd(x^2 \pm a^2)$ poni debet ipsa $= x \pm z$, & si occurrat $\surd(a^2 - x^2)$ fieri debet $= a - \frac{xz}{b}$.

Perinde est etiam si exponens quantitatis fluentis extra signum unitate auctum evadat multiplum aliquod indicis sub signo positi. Ut si sit formula $(a + cz^n)^m bz^{rn-1}dz$, & ponatur $a + cz^n = x$, substitutionesque omnes fiant, proposita

formula in hanc aliam convertetur $\frac{bx^m dx}{nc^r}(x-a)^{r-1}$. Tum elevando $x-a$ ad poteſtatem exponentis $r-1$, prodibit ſeries, quæ ſi r ſit numerus integer, ſemper finita erit, & cujus termini omnes in $\frac{bx^m dx}{nc^r}$ ducti fluxiones totidem ſuppeditabunt, quæ ſuperioribus regulis ad fluentes reduci poteſunt. Sæpe ſæpius autem fluentium inventio altioris indaginis eſſe ſolet. Difficiliores caſus, præcipuos ſaltem exponere ad præſens inſtitutum noſtrum non pertinet. Qui plura hacce in re deſiderat Tyro, adeat eximium opus Cl. Bougainvillii, in quo ſummorum Geometrarum, & potiſſimum Alembertii, atque Euleri noviſſima inventa ſingulari nitore, atque ordine complexus eſt.

DE

DE CURVARUM AFFECTIONIBUS.

PARS ALTERA.

PUnctum singulare vocari solet quod singularitate a reliquis curvæ punctis secernitur. Et primo quidem punctum aut simplex est, aut multiplex: simplex quod ad unum tantum curvæ ramum refertur, multiplex quod simul pluribus commune est: & singillatim duplex dicitur quod duobus, triplex quod tribus commune est, sive duplex per quod curva bis transit, triplex per quod transit ter &c. Punctum duplex triplici modo haberi poterit: aut quod duo rami *NF*, *EH* se ipsos secent, & nodum aliquem referant in *G*, *fig.* 22. aut quod ovalis *B b* ad curvam *AH* pertineat, *fig.* 23., cujus magnitudo cum ex constantibus quantitatibus æquationem curvæ afficientibus pendeat, mutatis successive constantibus, successive & per gradus singulos imminui poterit ovalis, quousque puncta *B*, *b* sibi accedentia demum congruant, & ovalis jam evanescens abeat in punctum curvæ *AH* conjugatum, quod erit duplex: aut denique quod duo curvæ rami se ipsos tangant in eodem puncto, quod rursus triplici ratione obtineri poterit, aut quod duo rami concavitatem ad oppositas partes obvertant, quo in casu dicuntur se osculari, aut quod obvertant ad easdem partes, & se am-

amplectantur, aut quod ramus alteruter in ipso puncto osculi inflectatur, & cum primo convexitatem rami alterius convexitati obvertisset, obvertat postmodum concavitatem, quod punctum dicitur osculo — amplexus. Punctum triplex habebitur si aut punctum duplex conjugatum alicubi in curvæ perimetro sit positum, aut curva rursus per punctum osculi, amplexus vel nodi transeat. Puncta singula distinguentur a se invicem quo modo puncta duplicia distingui diximus. Id etiam pro punctis aliis multiplicibus quibuscumque valere debet.

Hoc ipso patet puncta multiplicia esse etiam singularia. Simplicia autem puncta singularia quoque esse possunt si sint puncta inflexionis, aut puncta regressus alicujus, aut puncta serpentina. Inflecti dicitur curva ubi ex concava fit convexa, aut ex convexa fit concava. Regredi autem a loco dato, ad quem antea accedebat curva, duplici modo potest: aut ex eadem parte concavitatem objiciendo prioris rami convexitati, & cuspidem quasi efformando: aut ex parte altera prioris rami convexitati ipsius obvertendo convexitatem. Duos hosce casus jam olim distinxerat Hospitalius. Cl. Agnesia *lib.* 2. *Instit. Analyt. num.* 132. cuspidem describi docuit evolutione alterius curvæ, quæ alicubi inflexionem aliquam subeat. Cuspidem tamen impossibilem censuit Cl. De Gua de Malves. Ipsius demonstrationem eo vitio laborare Cramerus animadvertit, quod de tota infinita serie ex primo tantum seriei termino judicium tulerit. Sane si curvam MOm, *fig.* 24., ponamus definiri æquatione $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$, inveniemus regressum primi generis, seu cuspidem in puncto O. Posita enim $PO = x$, eidem abscissæ positivæ x duæ respondebunt positivæ semiordinatæ, $Pn = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a + \sqrt{ax}}$, & $PN = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}}$. Abscissis autem evadentibus negativis, ob radicalem terminum $\sqrt{ax}$, semiordinatæ omnes evadent imaginariæ. Vide Cl. Alembertium in Actis Berolinensis Scientiarum Academiæ amno 1746. At

At poteſt etiam curva *ABCDE*, *fig.* 25., ſinuoſitates quaſdam habere, & ſimplices inflexiones *ABC*, &c, in quibus ex concava fiat convexa, & rurſus concava. Quia vero ſinuoſitatum omnium magnitudo, & protenſio pro conſtantium quantitatum æquationem curvæ afficientium diverſa magnitudine diverſa eſt; patet quod ſi ſtatuamus ſinuoſitatem primam *BC* eouſque minui ut ad oculum evaneſcat, punctis *B*, *C* indiſcernibili tantum ſpatio a ſe invicem diſtantibus, per indiſcernibile ſpatium curva ex concava fiet convexa, & rurſus concava, inflexionemque quam vocant ſecundi generis, & inviſibilem ſubibit: & ſi rurſus alia ſinuoſitas *CD* ita minuatur, ut evaneſcat, puncto *D* ipſi *B* ad diſtantiam inaſſignabilem propius admoto, curva in loco *B* per ſpatium inaſſignabile ex concava fiet convexa, & rurſus concava, & inde convexa, inflexionemque ſubibit tertii generis, quæ inflexio erit viſibilis concavo arcu *AB* ad ſenſum cum arcu convexo *DE* conjuncto. Quod ſi poſtmodum ſinuoſitates aliæ minuantur ut evaneſcant, inflexiones orientur quarti, quinti generis &c alternatim viſibiles, & inviſibiles. Maupertuiſius hæc puncta vocavit ſerpentina in Actis Pariſienſis Academiæ anno 1729, ubi primum ipſorum ideam exhibuit.

Ex hac punctorum ſingularium idea primo conſequitur puncto multiplici abſciſſas plures, & plures ſemiordinatas inter ſe æquales reſpondere, puncto duplici duas, tres puncto triplici &c. Ubi enim curva nodum aliquem viſibilem, aut inviſibilem habeat in *G*, *fig.* 22., patet quod ducta tangente *MH*, demiſſiſque ex *F*, *E*, *H* ſemiordinatis *FB*, *ED*, *HL*, duæ hujuſmodi ſemiordinatæ *FB*, *ED*, & duæ abſciſſæ pariter *AB*, *AD* interſe invicem æquari debent, accedentibus ad ſe punctis *F*, *E*, & in puncto duplici *G* coaleſcentibus. Ita univerſim puncto multiplici tot abſciſſæ, & ſemiordinatæ æquales reſpondebunt, quotuplex erit gradus multiplicitatis puncti. At ſi de punctis ſingularibus, & non multiplicibus ſit ſermo, recta dumtaxat, quæ curvam tanget in puncto inflexionis viſibilis, aut inviſibilis cenſebitur curvæ ipſi occurrere in tot punctis quotuplex eſt gradus inflexio-

nis,

nis, & insuper duobus aliis. Curva enim quævis, *ABD*, *fig.* 26., ad minus in duobus punctis a recta linea *GE* secari potest. Statuamus ita moveri hanc rectam, ut demum evadat tangens in puncto *B*. Subtensa *BD* minuetur per gradus singulos, & evanescente subtensa tangens *ge* adhuc in duobus punctis censebitur curvæ occurrere. Si curva *LNP*, *fig.* 27., inflexionem aliquam subeat, in tribus punctis secabitur a recta *RQ*, quæ successive mota, ut interceptæ *MN*, *NO* evanescant, evadet tangens *TH*, & in tribus adhuc punctis sibi proximis curvæ occurret. Si inflexio secundi generis habeatur in puncto *N*, curva in quatuor punctis a linea recta secari poterit, in quinque si inflexio sit tertii generis &c, hoc est tangens in priore casu quater occurret curvæ, quinquies in casu altero &c.

Hoc ergo multiplicia puncta inter, & multiplicis inflexionis discrimen erit, quod multiplicia cum vere ad plures, diversosque ramos curvæ pertineant eodem tempore, quævis recta per puncta ipsa transiens toties ad minus occurrit curvæ quot sunt unitates in indice multiplicitatis puncti. At si punctum inflexionis alicujus multiplicis proponatur, non recta quævis, sed tangens tantum censetur in tot curvæ punctis occurrere, quot sunt unitates in indice multiplicitatis punctis & duobus insuper. Quod si punctum sit simul multiplex, & multiplicis inflexionis, recta, quæ ipsum tanget, in tot curvæ punctis censebitur occurrere quot sunt unitates in indice multiplicitatis puncti, & multiplicitatis inflexionis una addita: aut si ea sit semiordinatæ ad axem inclinatio, ut alicubi evadat tangens puncti alicujus hujusmodi, in totidem punctis ibidem censebitur curvæ occurrere semiordinata, in tribus scilicet si punctum tantummodo duplex sit, in quatuor si punctum duplex inflexionem primi generis subeat, in quinque si inflexio puncti duplicis secundi generis sit, & universim in tot punctis uno amplius, quot sunt unitates in indice multiplicitatum puncti, & inflexionis.

Positis hisce principiis Cl. de Bragelogne in Actis Parisiensis Academiæ anno 1730, & 1731 puncta multiplicia, & singularia curvarum ope calculi differentialis investigavit.

Ipsius

Ipsius methodum pluribus de caussis reprehendit De Gua de Malves in opere eximio, quo Cartesianam Analysim sic promovit, ut punctis singularibus non solum, verum etiam asymptotis, & maximis, ac minimis ordinatis, cæterisque omnibus curvarum proprietatibus inveniendis aptaverit: quod Eulerus quoque in Introductione ad Analysim infinitorum, & Cramerus in Introductione ad curvarum Analysim egregie præstiterunt. Et quidem asymptotos curvarum facilius Algebra Cartesiana determinari, quam calculo differentiali, & methodo fluxionum inficiari minime potest. Neque enim aliud requirit hæc omnis investigatio, quam ut proposita alicujus curvæ æquatione videatur utrum infinitæ abscissæ semiordinata infinita respondeat, aut finita, aut infinite parva. Ita si æquatio sit $y^m = a x^n$, & exponentes m & n positivi sint, infinitæ abscissæ respondebit semiordinata infinita, & curva ad genus Parabolicum referetur. Si vero m quidem positivus, & n negativus sit, abscissæ infinitæ x respondebit semiordinata y infinite parva, & curva erit generis Hyperbolici, & ad infinitum semper accedet axi quin axem secet, axisque idem propterea erit curvæ propositæ asymptotus. Theoriam omnem ramorum ad infinitum excurrentium diversi authores diversa methodo explicarunt.

Cramerus *cap.* 8. Introductionis maximos, minimosque æquationis terminos ope Newtoniani parallellogrammi excerpendos esse docuit, tum extractis radicibus ramorum infinitorum numerum, & positionem determinavit. Ut si proponatur curva æquationis $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6axy^2 - 2ax^3 + a^2x^2 = 0$, ejusdem parallellogrammi regula eruetur $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 = 0$, & extracta radice $y^2 + x^2 = 0$, cujus æquationis radices aliæ sunt $y + x\sqrt{-1} = 0$, $y - x\sqrt{-1} = 0$, scilicet imaginariæ: quod indicat neque abscissas, neque semiordinatas curvæ propositæ infinitas unquam evadere, neque ullos esse ramos ad infinitum usque excurrentes. Contra si proponatur æquatio $xy^2 - a^2y - b^3 = 0$, primo statui poterit $xy^2 - a^2y = 0$, unde eruetur $x = \frac{a^2}{y}$, & bini emergent rami infiniti coordinatis positive, & negative sumptis respon-

den-

dentes, & præditi aſymptoto ſemiordinatis parallella. Quod ſi fiat $x y^2 - b^3 = o$, eruetur $\pm y = \pm \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{x}}$, & duo alii prodibunt rami infiniti, quorum aſymptotus erit ipſe axis abſciſſarum. Eulerus *lib.* 2. Introductionis *cap.* 7. ſimili methodo uſus eſt, inveſtigando factores omnes reales ſupremi æquationis membri, in quo binæ indeterminatæ eamdem dimenſionum ſummam conficiunt.

De Gua de Malves *ſect.* 1. Analyſeos cum ſibi primum æquationem cubicam ſecundum dimenſionem ſemiordinatæ y diſpoſitam ob oculos propoſuiſſet, animadvertit quod ſi deficiat primus terminus $g y^3$, & ſit $g = o$, qui ſupererit primus æquationis terminus, & altior potentia ipſius y coefficientem habebit $m x + d$, & fiet $= o$ quando erit $x = - \frac{d}{m}$. Quod ſi bini ſimul priores termini deeſſent in æquatione, coefficiens ſuperſtitis prioris termini evaderet $i x^2 + e x + b$, qui ſi debeat in aliquo caſu evaneſcere, reſoluta hac ipſa æquatione prodibunt bini aut reales, aut imaginarii valores ipſius x, quibus ſubſtitutis coefficiens fiet $= o$. Generatim ſi tres, quatuor, quinque &c priores termini æquationis cujuſcumque ordinis deficerent, & coefficiens termini ſubſequentis tertiam, quartam, quintam &c poteſtatem involveret quantitatis x, eſſent ſemper tres, quatuor, quinque &c quantitatis ipſius valores imaginarii, aut reales, quibus poſitis idem etiam coefficiens evaneſceret. Jam vero terminis omnibus æquationis per coefficientem primi diviſis, & æquatione rite ordinata, coefficiens ſecundi termini eſt ſumma omnium radicum coefficiens tertii eſt ſumma omnium binariorum &c, & terminus ultimus eſt factum omnium radicum. Itaque ubi coefficiens primi termini fiat nullus, quin ſimul reliqui coefficientes omnes evaneſcant, infinitum evadet factum omnium radicum, aut ſumma radicum earumdem, binariorum, ternariorum &c, & aliqua æquationis radix infinita erit, adeoque aliquis erit ramus curvæ, qui excurret ad infinitum. Tot etiam ramos infinitos, & aſymptotos habebit curva ſemiordinatæ y parallellas, quot erunt radices reales abſciſ-

abſciſſæ x apti nullo efficiendo coefficienti ſuperſtitis primi termini.

Et quemadmodum primis æquationis terminis deficientibus aſymptoti, ita etiam deficientibus ultimis determinantur puncta ſingularia, & multiplicia. Diſponatur propoſita æquatio, tertiæ dimenſionis ex. gr., ad formam trianguli, atque hunc in modum

$$\begin{array}{l} g y^3 + m x y^2 + i x^2 y + k x^3 = o. \\ \quad + d y^2 + e x y + f x^2 \\ \quad\quad + b y + c x \\ \quad\quad\quad + a \end{array}$$

Patet quod ſi poſterioris columnæ terminus evaneſcat, tota æquatio dividi poterit per $y = o$, & ſemiordinata evaneſcente curva axem ſecabit. Radices igitur novæ æquationis $k x^3 + f x^2 + c x + a = o$, exhibebunt varios valores abſciſſæ x, ſive varias diſtantias communis originis abſciſſarum, & punctorum aliorum, in quibus curva ſecabit axem. Quod ſi novæ hujus æquationis radices binæ æquales ſint, aut binæ interſectiones axis in unam confluent, & habebitur punctum duplex, aut axem tanget curva, & ſic in duobus adhuc punctis abſciſſa cenſebitur curvæ occurrere. Si tres radices æquentur inter ſe, punctum interſectionis aut erit triplex, aut ſimul punctum duplex, & punctum contactus. Si radices omnes ſint imaginariæ, nulla erit curvæ, & axis interſectio.

Quod ſi vero una ex radicibus hujuſmodi realibus ultimi termini nihilo exæquati ſit etiam communis æquationi $i x^2 y + e x y + b y = o$, ſive ſi idem ſit valor abſciſſæ x, quo poſito ultimus ſimul, & penultimus æquationis antea propoſitæ terminus evaneſcat; valor ipſe indicabit aut punctum duplex, aut punctum ſimplex, cujus ſemiordinata y ſit tangens. Sublatis enim duobus poſtremis terminis tota æquatio diviſibilis erit per $y = o$, & rurſus $y = o$, & ſemiordinata in duobus punctis occurret curvæ. Si binæ ultimi termini radices æquales ſint inter ſe, eæque efficiant ut penultimus etiam terminus evaneſcat, punctum neceſſario erit duplex: ipſi enim duplex ſemiordinata, & duplex abſciſſa reſpondebit, quod puncto ſimplici etiam ſingulari convenire

nulla ratione potest. Pariter si una ex radicibus realibus ultimi termini nihilo jam exæquati non dumtaxat penultimum, verum etiam antepenultimum terminum in æquatione aliqua altioris ordinis reddat nihilo æqualem; punctum, cui illa abscissa respondebit, aut erit triplex, aut duplex, quod tamen habeat semiordinatam y pro tangente, aut punctum simplex inflexionis, in quo pariter semiordinata ipsa curvam tangat: atque ita porro. Verum ex quo æquatio, quæ posteriore termino æquationis primum propositæ nihilo æquato comparatur, 3, 4, 5 &c radices habeat inter se æquales, minime inferri potest punctum necessario esse triplum, quadruplum &c. Potest enim esse punctum dumtaxat duplex binis curvæ ramis se intersecantibus coalitum, in quo abscissa pariter, & semiordinata evadat tangens, & ter curvæ occurrere censeatur.

Ut in ipsa curvæ origine generatim puncta multiplicia detegerit Cl. De Gua de Malves animadvertit quod si constans æquationis terminus a, qui apicem Trianguli analytici occupat, deficiat, origo curvæ, & abscissæ x necessario erit in ipso curvæ perimetro. Æquatio enim $kx^3 + fx^2 + cx = 0$, quæ ex ultimo termino comparabitur, dividi poterit per $x = 0$, sicuti tota æquatio primum proposita dividi poterit per $y = 0$. Deinde si præter terminum constantem a, deficiant etiam termini alii $by + cx$, qui secundam horizontalem lineam trianguli analytici constituunt; ipsa origo curvæ necessario erit aliquod punctum duplex. Etenim terminus ultimus $kx^3 + fx^2$ nihilo exæquatus duas habebit radices æquales $x = 0$, $x = 0$, ipsoque termino evanescente tota æquatio dividi poterit per $y = 0$, $y = 0$. Generatim is erit ordo multiplicitatis puncti in communi origine abscissarum positi, qui numero deficientium terminorum horizontalium in triangulo analytico definietur: & qui ultimus erit terminus æquationis, ac nullam involvet potestatem semiordinatæ y, nihilo exæquatus radicibus suis exhibebit distantias omnes sive reales, sive imaginarias originis abscissarum, & intersectionum curvæ, & axis, quæ intersectiones veluti totidem curvæ vertices spectari possunt. Ita ex sola consideratione æquationis cujuslibet propositæ di-

gno-

gnoſci poterit quæ puncta multiplicia, & ſingularia in ipſa curvæ origine habeantur.

Ut vero dignoſcatur num curva aliqua extra ipſam etiam originem ſingularia, & multiplicia puncta habeat, transformata aequatione referenda eſt curva ad alium aliquem axem, qui cum priore indeterminatum angulum conſtituat, aut indeterminato intervallo ab eodem diſtet. Deinde obſervandum eſt quibus in caſibus, & quo poſito intervallo novi, & prioris axis, aut quo axis utriuſque angulo conſtans æquationis terminus, aut ſecunda etiam, & tertia, aut alia quævis horizontalis terminorum linea in triangulo Analytico deficiat. Inde etiam eodem modo iiſdemque principiis dignoſci poterit, quæ alia multiplicia puncta, aut ſerpentina in curva ſint, a quibus transformatæ æquationis abſciſſae ſupputari poſſint. Curvarum ita transformandarum methodum paucis expoſuit De Gva de Malves initio totius operis, & fuſius expoſuerunt Cramerus *cap.* 2. & *ſequ.*, & Eulerus *lib.* 2. *cap.* 2. Illi etiam regulas ſuppeditarunt tangentium ducendarum, & ductis tangentibus puncta ſingularia diſtinguere a ſe invicem docuerunt, & maximas inſuper, minimaſque curvarum ſemiordinatas, flexus contrarios, ac regreſſus, & ſingulas regreſſuum ſpecies invenire. Denique ſuperiorum ordinum curvas in certas claſſes, ac genera diſtributas ſingillatim enumerarunt.

Verum haec omnis curvarum enumeratio arbitraria fortaſſe videri poſſet. Et quidem Newtonus cum diverſitatem ramorum in infinitum excurrentium, punctorumque ſingularium conſideraſſet, tertii ordinis curvas numero 72 fecit: quibus duas adhuc Stirllingius, & quatuor alias De Gva de Malves addiderunt. Eulerus ſola ramorum infinitorum conſideratione curvarum genera diſtinxit, & genera curvarum tertii ordinis 16 ſtatuit, & curvarum quarti ordinis 146. Cramerus autem curvarum tertii ordinis genera 14 eſſe voluit, quarti ordinis 9, quinti 11. Aliis aſſumptis diſtributionis totius principiis alius prodiret generum, & claſſium numerus. Illud maxime intereſt hacce in re ut propoſita aequatione aliqua affectiones curvae omnes determinentur, videaturque

quae affectionum inveniendarum facilior methodus, ac via fit. Porro fluxionum methodus pro ducendis tangentibus sic expedita, & brevis est ut nihil magis; ad puncta vero multiplicia investiganda semper aptari potest citra illam curvae transformationem, quae plerumque operosa est, & quando puncta extra originem curvae sunt posita Cartesianae Algebrae applicationem reddit complicatiorem. Regressus denique inflexionesque curvarum, & maximæ, ac minimæ ordinatæ fluxionum methodo determinantur, distinguunturque facillime inter se. Quare cum punctorum multiplicium theoriam ex methodo fluxionum sic eduxissem, ut declinaverim difficultates omnes, quas de Gva de Malves Bragelongnio opposuerat, & Mac-Laurini theorema de maximis & minimis ordinatis breviter demonstrassem, invenissemque compendia quædam Problematum Isoperimetricorum, visum fuit singillatim omnia paucis propositionibus complecti.

Problema Primum.

Invenire subtangentem, subnormalem, tangentem, normalem, & interceptam curvae cujuscumque FCL, *fig.* 19.

Resolutio.

Si ACT curvam tangat in puncto C, & sit Mc semiordinatae BC parallella, & fiat ut supra $FB = x$, $BC = y$, $BM = dx$, $cm = dy$, ob similitudinem triangulorum Cmc, ABC, CBH, erit subtangens $AB = \frac{y\,dx}{dy}$, subnormalis $BH = \frac{y\,dy}{dx}$, tangens $AC = \surd\left(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2}\right) = \frac{y}{dy}\surd\,(dy^2 + dx^2)$, normalis $CH = \frac{y}{dx}\surd\,(dy^2 + dx^2)$, intercepta $AF = \frac{y\,dx}{dy} - x$, & perpendicularis $FG = y - \frac{x\,dy}{dx}$. Data igitur aequatione, quae coordinatarum x, & y relationem exprimat, valorem alterutrius fluxionis ex altera definiendo superioribus regu-

regulis evanefcent fluxiones omnes, & prodibunt quæfitæ quantitates. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si curva FCL fit Parabola Apolloniana, & definiatur æquatione $ax = y^2$, erit $dx = \frac{2ydy}{a}$, & fubtangens $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a} = 2x$, fubnormalis $= \frac{1}{2}a$ tangens $= \sqrt{(4x^2 + ax)}$, normalis $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + ax)}$, intercepta $= x$. Si proponatur Hyperbola intra Afymptotos LCO *fig.* 28., & fit æquatio $xy = ab$, erit fubtangens $BA = -x$, jacebit fcilicet ex parte origini abfciffæ oppofita, & erit ipfi abfciffæ æqualis. Fiet etiam $FT = 2y$, $HB = -\frac{y^2}{x}$, $HC = \frac{ab}{x}\sqrt{(1 + \frac{a^2b^2}{x^4})}$.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si proponatur æquatio $2ay^2 = 2apx - px^2$, hoc eft fi curva fit ellipfis axis majoris $= 2a$, & paremetri $= p$, erit fubtangens $= \frac{2ax - x^2}{a - x}$, fubnormalis $= \frac{p}{2a}(a - x)$. Cum igitur fubtangentis valor ex valore parametri non pendeat ad idem abfciffæ punctum eadem erit fubtangens ellipfium omnium eodem axe majore, & quocumque minore axe defcriptarum. Si proponatur Hyperbola ad axem relata, & fit æquatio $2ay^2 = 2apx + px^2$, erit fubnormalis $= \frac{p}{2a}(a+x)$, & fubtangens $= \frac{2ax + x^2}{a + x}$, quæ rurfus ex valore parametri non pendebit. Erit etiam, *fig.* 19., intercepta $AF = \frac{ax}{a + x}$. Si proponatur generalis Hyperbolæ æquatio $ay^{m+n} = bx^m(a + x)^n$, erit fubtangens $= \frac{(m+n)(ax + x^2)}{ma + mx + nx}$, & intercepta $= \frac{nax}{ma + mx + nx}$.

Co-

Corollarium Tertium.

Si abſciſſa fiat infinita, & præ ipſa negligantur aliæ quantitates datæ, & conſtantes, prodibit diſtantia originis abſciſſarum, & interſectionis axis cum recta, quæ ad infinitam diſtantiam curvam tangit $= \frac{nax}{mx + nx} = \frac{na}{m+n}$. Evadet etiam æquatio curvæ $a y^{m+n} = b x^{m+n}$, ſive $y \cdot a^{\frac{1}{m+n}} = x \cdot b^{\frac{1}{m+n}}$. Quare cum ſit $dx : dy = AF : FG$, fiet in eadem hypotheſi $FG = \frac{na \cdot b^{\frac{1}{m+n}}}{(m+n) \cdot a^{\frac{1}{m+n}}}$, & ſi per puncta A, & G hoc modo determinata ducatur recta habebitur curvæ aſymptotus. Si curvæ aliæ proponerentur, quarum aſymptoti eſſent plures, æquatio caſus omnes diverſos ſuppeditaret, eademque ſemper ratione Fluxionum methodus aſymptotis quibuſcumque inveſtigandis ſufficeret.

Problema Secundum.

Aſſignare in curva aliqua punctum multiplex.

Resolutio.

Si punctum duplex quærendum ſit, æquatio primum ſecundum dimenſiones ſemiordinatæ y diſponatur. Quia puncto duplici ſemiordinata duplex reſpondet, ut in anteceſſione dictum eſt, & rite ordinata æquatio duas complecti debet radices inter ſe æquales, ſi ſinguli æquationis termini per reſpondentes ſeriei Arithmeticæ terminos multiplicentur, hoc eſt, per ſuperius theorema ſextum, ſi habita ſemiordinata y pro variabili æquationis fluxio accipiatur, & vocentur Y termini omnes qui per dy multiplicantur; æquatio emergens Ydy, per *Coroll.* 2. ejuſdem *Propoſ.*, unam adhuc ex iis radicibus æqualibus puncto duplici reſpondentibus comple-

plectetur, & erit $Tdy=o$. Pariter si dumtaxat abscissa x ut variabilis consideretur, & æquationis secundum dimensiones ipsius x dispositæ accipiatur fluxio $X\,dx$, erit $X\,dx=o$, & unam adhuc æqualium radicum continebit nova ipsa æquatio. At si secunda fluxio acccipiatur, hoc est si Tdy, & $X\,dx$ rursus per alias Arithmeticas series multiplicentur, quæ emerget quantitas nullam amplius aequalium radicum continebit, & constabit ex terminis sese minime destruentibus.

Si vero punctum non duplex, sed triplex sit, in secundae etiam fluxionis expressione una adhuc superérit ex tribus radicibus aequationis curvam definientis, & erit tota eadem fluxio $=o$. At si tertia accipiatur fluxio, neque termini in ipsa omnes evanescent, neque ulla amplius ex tribus radicibus aequalibus supererit.

Eodem modo procedendum est si punctum alia qualibet multiplicitate sit multiplex. Generatim igitur videndum est quo in casu, & quibus positis abscissae, & semiordinatae valoribus tota aequatio, & succedentes aliquot aequationis fluxiones evanescant. Tunc enim ex numero fluxionum successive evanescentium multiplicitas puncti, & ex valore fractionis ultimo loco superstitis multiplicitatis species agnoscetur. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si sumptis igitur aequationis fluxionibus, & substituto coordinatarum valore aliquo, termini omnes destruantur, curva praeseferet aliquod punctum multiplex, duplex nimirum si tota aequatio, & prima aequationis fluxio pro eodem casu evanescat, triplex si evanescat insuper secunda fluxio &c. Proponatur aequatio ad curvam, quae Newtono est speciei 69, videlicet $py^2-2pcy+pc^2=-2a^3+5a^2x-4ax^2+x^3$. Erit prima aequationis fluxio $2pydy-2pcdy=5a^2dx-8axdx+3x^2dx$, in qua termini omnes se destruent substituendo c loco y, & a loco x. Curva igitur punctum multiplex praeseferet ubi erit $c=y$, $a=x$. Ut innotescat cujus generis

neris ſit punctum, ſumatur etiam ſecunda fluxio: quae cum minime evaneſcat factis iiſdem ſubſtitutionibus, & ſuperſit $p\,dy^2 = -a\,dx^2$, praeſto erit punctum non niſi duplex eſſe poſſe.

Corollarium Secundum.

Pariter ſi proponatur æquatio $y^4 + x^4 - 2\,a^2 y^2 - 2\,b^2 x^2 + b^4 = o$, cujus prima fluxio eſt $4\,y^3\,dy + 4\,x^3\,dx - 4\,b^2\,y\,dy - 4\,b^2\,x\,dx$, patet & aequationem totam, & fluxionem ipſam evaneſcere ubi fiat $y = o$, & $x = \pm b$. Cum igitur in eodem caſu non evaneſcat amplius ſecunda fluxio, curva in duobus punctis duplicibus ſecabit axem abſciſſarum, poſitis hinc inde ad eamdem diſtantiam $b\,a$ communi abſciſſarum origine. Idem valet de exemplis aliis omnibus a Cramero relatis *cap.* 10. *num.* 170. & *ſequ.* Contra ſi proponatur aequatio $y^4 + x^4 - 4\,a\,(y^3 + x^3) + 6\,a^2\,(y^2 + x^2) - 3\,a^3\,(y + x) = o$, quia poſita $x = a, y = a$, ex prima fluxione ſupereſt $a^3\,dy + a^3\,dx$, iis abſciſſae, & ſemiordinatae valoribus punctum multiplex reſpondere nequaquam poterit. Ita juxta noſtram hanc methodum minime ſequitur abſurdum, quod ex regulis Bragelongnii ſequi dixerat De Gva de Malves *ſect.* 2. *lem.* 4. *coroll.* 1.

Corollarium Tertium.

Poterit etiam diſtingui ſpecies puncti multiplicis ducta tangente, ſive, per *Prob.* 1., determinata ratione $dx : dy$ ex prima fluxione, quae ſupererit. Etenim ſi punctum duplex dumtaxat ſit, & duorum ramorum curvae interſectione conſtituatur, fractio $\frac{dx}{dy}$ duos valores diverſos exhibebit. Tangens puncti erit unica, & unius dumtaxat valor ipſius fractionis ſi punctum duplex oſculi ſit, aut amplexus, aut oſculi ſimul, & amplexus, aut denique alicujus regreſſus, qui ex nodo curvae evaneſcente conſtituatur. Punctum duplex ſine tangente erit, & imaginarius prodibit valor fractionis

dx

$\frac{dx}{dy}$ ſi punctum ſit conjugatum, & inviſibile. Ita quia ex prioris Corollarii aequatione $p\,dy^2 = -a\,dx^2$ eruitur $\frac{dx}{dy} = \pm\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{p}}$, punctum duplex conjugatum erit curvae, quemadmodum a Newtono ipſo ſtatutum eſt.

COROLLARIUM QUARTUM.

Simili modo innoteſcet ſpecies punctorum triplorum, quadruplorum &c ductis tangentibus. Si punctum genere triplex ſit & fractio $\frac{dx}{dy}$ ex tertia fluxione eruta tres diverſos valores habeat, puncto ipſi tres convenient tangentes, hoc eſt trium ramorum curvae interſectionibus punctum conſtituetur: ſed ſi duo dumtaxat valores hujuſmodi poſſint elici, puncto non niſi binae convenient tangentes, & conſtituetur punctum unico curvae ramo tranſeunte per punctum oſculi, aut amplexus, regreſſuſve, ut mox diximus generati: denique ſi unicus eruatur tangentis valor, punctum triplex orietur ex inviſibili puncto duplici in curvae perimetro alicubi conſtituto. Exemplum demus ex Cl. de Bragelogne 1. *par.* §. 60. In curva, quæ definitur æquatione $ay^3 - 3acy^2 + 3ae^2y = ae^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{2}a^4$, ſi fiat $y = e$, & $x = a$, poſt tres acceptas ſucceſſive fluxiones ſupereſt $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{1}{3}$. In hoc igitur caſu unica erit tantummodo curvæ tangens, & inviſibile punctum duplex curvae perimetro inhaerebit.

COROLLARIUM QUINTUM.

Si in primae fluxionis expreſſione pro caſu aliquo evaneſcant termini omnes affecti fluxionibus dx, dy, poſtmodum etiam evaneſcent termini affecti aliis fluxionibus ddx, ddy, $dddx$, $dddy$ &c. Quare in accipiendis aliis aequationis propoſitae fluxionibus compendium quoddam habebitur,

quod scilicet dx, & dy accipi possint pro constantibus. Hoc ipso praesto erit quibus conditionibus prodeat punctum multiplex. Quod duplex est prodit nihilo exæquando æquationem totam, & duos coefficientes quantitatum dx, dy in primae fluxionis expressione. Ad punctum triplex inveniendum debent insuper nihilo æquari tres coefficientes quantitatum dx^2, $dxdy, dy^2$, & ad habendum punctum quadruplex quatuor insuper membra tertiæ fluxionis &c. Quæ cum ex suis etiam principiis deduxerit De Gva de Malves, difficultates alias præoccupavimus, quas author ipse Bragelongnio opposuerat in *coroll.* 1. lemmatis ejusdem quarti. Cæterum authoris methodus differentiali calculo undique affinis est.

Problema Tertium.

Invenire punctum singulare, quod non sit multiplex.

Resolutio.

Quia recta, quæ curva tangit in puncto inflexionis aliquo visibilis, aut invisibilis, censetur curvæ ipsi occurrere in tot punctis, quotuplex est gradus inflexionis, atque insuper duobus aliis, recta vero alia quæcumque non nisi in unico puncto occurrit; si curvæ alicujus semiordinatæ tangenti parallellæ sint, ut denique semiordinata in tangentem migret, abscissa in unico semper puncto occurret curvæ, semiordinata vero, quæ curvam tanget, in duobus punctis occurret si nullum in contactu habeatur punctum singulare, occurret autem in pluribus si punctum sit multiplicis inflexionis, in tribus scilicet si inflexio sit primi generis, in quatuor si sit secundi &c. Itaque in æquatione, quæ relationem coordinatarum exprimit, secundum abscissæ dimensiones disposita nullæ esse debent radices inter se æquales. At si secundum potestates semiordinatæ æquatio disponatur, binæ esse debent radices inter se æquales ubi punctum quod a semiordinata tangitur non sit singulare, tres ubi punctum inflexionem primi generis subeat, quatuor ubi subeat inflexionem secundi generis

neris &c. Itaque etiam sumptis juxta regulas superiores fluxionibus æquationis, abscissis habitis pro fluentibus nullæ fluxiones evanescent, at habitis pro fluentibus semiordinatis tot evanescent succedentes fluxiones quot unitates erunt in indice multiplicitatis inflexionis una addita, binæ videlicet fluxiones evanescent si inflexio sit primi generis, tres si secundi generis sit inflexio &c. Q. E. I.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si proponatur curva æquationis $y^4 - by^3 - cx = o$, & requiratur quod singulare punctum habeat ubi axem secat, & fit $y = o$, inprimis æquationis fluxio $4y^3\,dy - 3by^2\,dy - c\,dx$ accipienda est: quæ quoniam pro eodem casu non evanescit, argumento erit in ipsa curvæ origine punctum multiplex esse non posse. At si dumtaxat semiordinatæ pro fluentibus habeantur, prima æquationis fluxio $4y^3\,dy - 3by^2\,dy$ evanescet, ubi erit $y = o$. Pariter secunda fluxio $12y^2\,dy^2 - 6by\,dy^2$ pro eodem casu fiet $= o$. At sumptis tertiis fluxionibus, factaque $y = o$, supererit $- 6b\,dy^3$. Ibidem igitur curva inflexionem primi generis præseferet.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Simili modo innotescet Parabolam cubicam, quæ definitur æquatione $y^3 = a^2 x$, punctum inflexionis habere in ipso vertice. Parabola aequationis $y^4 = a^3 x$ habebit in vertice punctum duplicis inflexionis, sive ut vocabat Maupertuisius punctum serpentinum. Punctum etiam serpentinum in ipsa origine habebit curva aequationis $y^5 - by^4 - x = o$. Parabola aequationis $y^5 = a^4 x$ habebit in vertice punctum triplicis inflexionis, seu punctum serpentinum quod simul inflexionem visibilem subibit, & generatim si sit aequatio $y^m = a^{m-1} x$, erit gradus inflexionis $m - 2$.

Corollarium Tertium.

Data ergo aequatione curvae, cujus semiordinatae parallellae sint tangenti singularis alicujus puncti, ut demum cum tangente ipsa congruant, & sumptis aequationis fluxionibus innotescet species puncti singularis. Quod si vero punctum aliquod singulare habeat curva, nec tamen semiordinatarum ad axem positio sit, ut cum tangente ipsius puncti parallellismum servent, aequatio curvae transformanda erit in aliam, quae relationem abscissarum ad semiordinatas tangenti parallellas exprimat. Punctorum hujusmodi inventio ope Algebrae Cartesianae, & methodi Fluxionum aeque operosa erit: ad alia singularia puncta invenienda methodus Fluxionum magis expedita, ac simplex erit. Breviores inflexionum determinandarum regulas inferius explicabimus.

Problema Quartum.

Invenire punctum quod simul multiplex, & multiplicis inflexionis sit.

Resolutio.

Si punctum sit simul multiplex, & multiplicis inflexionis, abscissa in tot punctis dumtaxat occurret curvae, quot unitates erunt in indice multiplicitatis puncti, semiordinata vero, quae etiam evadet tangens, in tot curvae punctis occurret, quot unitates erunt in indice multiplicitatis puncti simul, & multiplicitatis inflexionis una addita, in quatuor scilicet si punctum duplex dumtaxat sit, & inflexionem primi generis subeat, in quinque si punctum duplex subeat inflexionem secundi generis, in sex punctis si subeat inflexionem tertii &c. Sumptis igitur successivis fluxionibus aequationis, semiordinatisque, & abscissis habitis pro fluentibus, tot evanescent hujusmodi fluxiones quot unitates erunt in indice multiplicitatis puncti una dempta: at semiordinatis dumtaxat

taxat habitis pro fluentibus, tot a prima incipiendo, fluxiones evanescent, quot unitates erunt in exponente multiplicitatis puncti simul, & inflexionis. Observando igitur quibus in casibus, & quo posito valore abscissae, & semiordinatae, & tota aequatio, & subsequentes hujusmodi fluxiones evanescant, singularitas puncti, & singularitatis species dignoscetur. Q. E. I.

COROLLARIUM.

Hac regula punctum duplex, & simplicis inflexionis deprehendetur in curva, quae definitur aequatione $y^5 - b y^4 - c x^3 + m x^2 = o$. Præsto erit etiam utrum ex tribus ramis punctum triplex curvae alicujus propositae constituentibus unus, aut bini, aut tres simul inflexionem aliquam subeant primi, secundi, tertii generis &c: aut si duorum ramorum alicubi se intersecantium alteruter in ipso puncto intersectionis serpet &c. Sed hic quoque si semiordinatae non sint tangenti puncti inflexionis parallelae, eadem curvae transformatione, quam superius indicavimus, opus erit.

PROBLEMA QUINTUM.

Data semiordinata alicujus curvae, & fluxione axis determinare semiordinatas proxime antecedentes, & subsequentes.

RESOLUTIO.

Fiat in curva PML, *fig.* 29., $PN = x$, $NA = dx$, $NB = -dx$, $NM = y$, & Newtoniano more exprimatur relatio coordinatarum x, y generali aequatione $y = A + ax + bx^2 + cx^3$ &c: ad cujus aequationis formam quaslibet aequationes reduci posse quisque facile intelliget si in peculiari casu, deficiente potestate aliqua ipsius x, fiat potestatis deficientis coefficiens $= o$. Ut ex hac aequatione eruatur valor semiordinatae AF abscissae PA respondentis substituatur $x + dx$ loco x.

Tum

Tum vero ordinatis terminis prodibit

$$\begin{aligned} AF = A &+ ax + bx^2 + cx^3 \text{ \&c} \\ &+ a\,dx + 2bx\,dx + 3cx^2\,dx \text{ \&c} \\ &\qquad + b\,dx^2 + 3cx\,dx^2 \text{ \&c} \\ &\qquad\qquad + c\,dx^3 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Porro ex eadem generali aequatione sumptis fluxionibus, si abscissae x aequabiliter fluant, & sit $ddx = 0$, habebitur

$$\begin{aligned} dy &= a\,dx + 2bx\,dx + 3cx^2\,dx \text{ \&c} \\ ddy &= 2b\,dx^2 + 6cx\,dx^2 \text{ \&c} \\ dddy &= 6c\,dx^3 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Erit igitur $AF = y + dy + \frac{ddy}{1.2} + \frac{dddy}{1.2.3}$ &c.

Si abscissae fluxio dx negativo signo accipiatur, negativa etiam evadent signa terminorum numero parium, & manentibus reliquis ut antea fiet semiordinata

$BC = y - dy + \frac{ddy}{1.2} - \frac{dddy}{1.2.3}$ &c. Q. E. I.

Corollarium Primum.

Ex serie totius calculi manifestum est hos semper semiordinatæ antecedentis, & subsequentis valores esse, quotcumque sint generalis curvae aequationis termini qui deficiant. Idipsum sinthesi elegantissima fusius demonstravit Mac-Laurinus *Prop.* 20. *lib.* 1. Analytica tamen demonstratio quam protulit *lib.* 2. §. 751. minime casus omnes complectitur. Primo enim ponit $y = A + Bz + Cz^2 + \mathcal{D}z^3$ &c, & pro coefficientibus determinandis statuit Mac-Laurinus evanescente z esse E valorem ipsius y, & dE, ddE, $dddE$ &c valores ipsarum dy, ddy, $dddy$ &c. Hoc posito cum sit $y = A + Bz + Cz^2 + \mathcal{D}z^3$ &c, facto $z = 0$, erit $y = E = A$. Pariter sumptis fluxionibus erit $\frac{dy}{dz} = B + 2Cz + 3\mathcal{D}z^2$ &c, adeoque pro eodem casu $B = \frac{dy}{dz} = \frac{dE}{dz}$: & rursus fluxiones alias accipiendo erit $\frac{ddy}{dz^2} = 2C + 6\mathcal{D}z$ &c, & posito $z = 0$ erit

erit $C = \frac{ddy}{2dz^2} = \frac{ddE}{2dz^2}$, & ita porro. Quare si pro dz ſcribatur 1 erit $y = E + z\,dE + \frac{z^2\,ddE}{1\,.\,2} + \frac{z^3\,dddE}{1\,.\,2\,.\,3}$ &c, & si fiat $z = dz = 1$, erit $y = E + dE + \frac{ddE}{1.2} + \frac{dddE}{1.2.3}$ &c. Hac autem ratione ſuperius theorema iis tantum casibus accommodaretur, in quibus ſupputando abſciſſas ex puncto N nullae deficerent poteſtates ipſius z. Nam si in aequatione deficiat z^2, hoc eſt si sit $C = o$, erit etiam $ddy = ddE = o$.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si in eodem curvae puncto M ducatur tangens MT, erit prima ſemiordinatae fluxio $dy = OT$, adeoque erit TF, quae tangente, & curva intercipietur $= -\frac{ddy}{1.2} - \frac{dddy}{1.2.3}$ &c, & $HC = -\frac{ddy}{1.2} + \frac{dddy}{1.2.3}$ &c. Quare si puncta C, M, F proxima intelligantur, negligi poterit tertia ſemiordinatae fluxio prae ſecunda, & aliis inferiorum ordinum fluxionibus omiſſis ſtatui poterit $TF = HC = -\frac{1}{2}ddy$: aut si curva axem verſus non concava, ſed convexa sit, ſecunda ſemiordinatae fluxio per *Coroll.* 2. *Theor.* 1. fiet positiva, & quae curvae, & tangenti interjicietur lineola erit $= \frac{1}{2}ddy$.

PROBLEMA SEXTUM.

Invenire radium circuli MQ eamdem curvitatem cum curva PML habentis in puncto M, *fig.* 30.

RESOLUTIO.

Si curvae & circuli eadem curvitas intelligatur in puncto M erit $mv = mr$, & si puncta M, & m ſumantur proxima

ma inter se erit insuper $mH = MR$, & per Corollarium antecedens habebitur $mv = -\frac{1}{2} ddy$. Hoc ipso fiet $dx^2 + dy^2 = mM^2 = -\frac{1}{2} ddy . MR$, & $MT = \frac{1}{2} MR = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Est autem $MN : MT = MC : MQ$. Quare si MN vocetur y, erit radius osculi, seu curvedinis $MQ = \frac{MC . (dx^2 + dy^2)}{-yddy}$. Quod si valorem normalis MC ex formula radii osculatoris eliminare placeat, substituatur pro normali ipsa $\frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$. Tum enim radius osculi evadet $= \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, & in peculiari quolibet casu substitutis rursus valoribus fluxionum. dy^2, ddy, radii quæsiti valor fluentibus dumtaxat quantitatibus definietur. Q. E. I.

COROLLARIUM.

Si radius osculi ellipseos exempli loco quæratur, & fiat $2ay^2 = 2apx - px^2$, adeoque $dy = \frac{2apdx - 2pxdx}{4ay} = \frac{apdx - pxdx}{2\sqrt{\left(\frac{2a^2px - apx^2}{2}\right)}}$, & dx constans intelligatur, erit $ddy = \frac{-a^3p^2dx^2}{4\left(\frac{2a^2px - apx^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{p^2dx^2}{4y^3}$, & radius osculi evadet $= MC . \frac{4y^2(dx^2 + dy^2)}{p^2dx^2} = \frac{4MC^3}{p^2}$.

PROBLEMA SEPTIMUM.

Invenire maximam, aut minimam curvæ semiordinatam.

RE-

RESOLUTIO.

Manentibus omnibus ut in quinto Problemate, & *fig.* 29., ſtatuatur caſus quod prima ſemiordinatæ fluxio nulla ſit. Evaneſcet etiam ſubnormalis curvæ $\frac{ydy}{dx}$, & ſubnormali evaneſcente tangens evadet axi parallella. Tum vero fiet $AF = y + \frac{1}{2} ddy$ &c, & $BC = y + \frac{1}{2} ddy$ &c, nimirum ubi ſecunda ſemiordinatæ fluxio ſit poſitiva, & curva convexitatem ſuam axi obvertat, utraque ſemiordinata proxime antecedens, & ſubſequens major erit ſemiordinata intermedia NM, & ſemiordinatæ valor ex æquatione erutus erit minimus. Si curva axem verſus ſit concava, & ſecunda ſemiordinatæ fluxio negativa, prima fluxione evaneſcente, ſemiordinata ipſa fiet maxima. Quod ſi prima ſimul, & ſecunda ſemiordinatæ fluxio evaneſcat, erit ſemiordinata proxime antecedens $= y - \frac{1}{6} dddy$ &c, ſubſequens vero $= + \frac{1}{6} dddy$ &c, ſcilicet y nec maxima erit nec minima omnium ſemiordinatarum. At ſi evaneſcat inſuper tertia fluxio, evadet ſemiordinata antecedens $= y + \frac{1}{24} ddddy$ &c, & ſubſequens $= y + \frac{1}{24} ddddy$ &c, hoc eſt ſi valor quartæ hujus fluxionis ſit poſitivus ſemiordinata intermedia erit omnium minima, maxima vero ſi negativus. Ita diſcurrendo per reliquos caſus omnes manifeſtum fiet quod ſi alicubi prima ſemiordinatæ fluxio evaneſcat, & ſimul etiam evaneſcat numerus aliquis par ſuccedentium fluxionum 0, 2, 4, 6 &c, curva eo in loco exhibebit maximum aliquod, aut minimum: maximum utique ſi prima fluxio poſt evaneſcentes omnes ſuperſtes ſit negativa, minimum ſi poſitiva. Q. E. I.

Contingere aliquando poterit quod prima ſemiordinatæ fluxio exprimatur fractione, cujus numerator quidem ſit data quantitas, denominator vero ſit $= o$, ſive, ut dici aſſolet, quod dy ſit infinita. Tunc evaneſcet ſubtangens curvæ,

quæ fractione $\frac{ydx}{dy}$ exprimitur, & subtangente evanescente evadet tangens axi perpendicularis. Erit vero semiordinata antecedens $= y - \frac{1}{0} + \frac{1}{2} ddy$ &c, & subsequens $= y + \frac{1}{0} + \frac{1}{2} ddy$ &c: adeoque si in eodem curvæ ramo reperiantur semiordinatæ, nec simul majores, nec simul minores erunt semiordinata intermedia, & y nec maxima erit, nec minima. Ramum curvæ eumdem voco, in quo coordinatæ exprimuntur æquationibus, quæ specierum, & signorum ratione eædem sint. Ita in circulo maximum, quod habetur erecta ex centro perpendiculari ad diametrum, in eodem curvæ ramo est, ex utroque perpendicularis ejusdem latere continuato: utrimque enim semiordinatæ exprimuntur unica quantitate $\sqrt{(ax - x^2)}$, quemcumque demum valorem obtineant abscissæ x. At vero in Parabola cubica $GAFM$, *fig.* 31., in qua abscissis CN, CD supputatis a puncto C, & posita $CE = EF = a$, æquatio habetur

$$y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 = a^3 - 3a^2x + ax^2$$

sive $y = a + a^{\frac{1}{3}}(\pm a \mp x)^{\frac{2}{3}}$

ramos GF, FM diversos voco, quia diversis valoribus amborum coordinatæ exprimuntur, superioribus signis pro priore ramo valentibus, & inferioribus pro posteriore. In ramis autem hujusmodi præsto est, quod cum ubique semiordinatarum valores non definiantur eadem omnino æquatione, prima, tertia, quinta, & aliæ omnes imparis ordinis fluxiones utrobique esse poterunt sub eodem signo. Ita si fiat $CE = x$, $EF = y$, erit semiordinata in priore ramo proxime antecedens $= a + a^{\frac{1}{3}}(a - x + dx)^{\frac{2}{3}} = a + a^{\frac{1}{3}}(a-x)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} a^{\frac{1}{3}} (a-x)^{-\frac{1}{3}} dx$ &c $= y + dy - \frac{1}{2} ddy$ &c, & semiordinata in posteriore ramo proxime subsequens $= a + a^{\frac{1}{3}} (-a + x + dx)^{\frac{2}{3}} = y + dy - \frac{1}{2} ddy$ &c: adeoque in puncto F, ubi tangens evadit axi perpendicularis, & valor ipsius dy fractione exprimitur, cujus numerator nullam rationem assignabilem ad deno-

denominatorem habet, prodibit minimum. In aliis curvis utrimque axi accedentibus, & in quibus prima semiordinatæ fluxio est negativa, pro eodem casu non minimum, sed maximum haberetur.

COROLLARIUM PRIMUM.

Ut regulas explicemus exemplo aliquo quæratur quo in loco maximum aut minimum habeat curva, quæ definitur æquatione $3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48b^4 = c^3y$. In primis sumptis fluxionibus prodibit $12x^3 - 84ax^2 + 168a^2x - 96a^3 = \frac{c^3dy}{dx}$, & $36x^2 - 168ax + 168a^2 = \frac{c^3ddy}{dx^2}$. Si fiat $dy = 0$, erit etiam $x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3 = 0$: cujus æquationis cubicæ tres divisores sunt $x - a = 0$, $x - 2a = 0$, $x - 4a = 0$. Jam vero si in secundæ fluxionis expressione pro abscissa x substituantur successive a, $2a$, $4a$ prodibunt successivi valores ipsius $\frac{c^3ddy}{dx^2}$, $36a^2$, $-24a^2$, $72a4$. Curva igitur maximum præseferet, quod abscissæ $2a$ respondebit, & duo insuper minima respondentia abscissis a, & $4a$.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Ex his etiam consequitur deficere hacce in re methodum Hospitalii, aliorumque qui Hospitalium secuti sunt, Wolfii, Deidierii, Agnesiæ &c: cum neque pro distinguendis maximis omnibus, minimisque a se invicem, neque pro maximo, aut minimo aliquo certe indicando methodus ipsa sufficiat. Falsum est enim semiordinatam maximam ibi, aut minimam semper esse, ubi prima semiordinatæ fluxio evanescit. Regulæ defectum attigit Boscovichius cum invenisset casum, in quo prima fluxione evanescente semiordinata non refert maximum, aut minimum. Genuinam maximorum, minimorumque theoriam Mac-Laurinus primus omnium explicavit. Neque tamen generatim verum est, quod cum Hospitalio Mac-Laurinus in Tractatu Fluxionum §. 865. con-

tendebat, prima fluxione evadente infinita haberi ſemper maximum, aut minimum: niſi in peculiaribus iis caſibus, de quibus antea dictum eſt.

Problema Octavum.

Invenire flexus contrarios curvarum.

Resolutio.

Quia curvæ *PML* flexu contrario in *M*, *fig.* 32., 33., ex concavis fiunt convexæ ad eamdem partem, aut ex convexis fiunt concavæ, per *Coroll.* 2. primi Theorematis punctum inflexionis *M* erit illud, in quo ſecunda ſemiordinatæ fluxio ex negativa fiet poſitiva, aut vice verſa. Itaque in primo caſu, quo ſcilicet curvarum concavitati convexitatem ſuccedere intelligitur, prima fluxio ſemiordinatæ te defluet ſucceſſive, imminueturque uſque ad *M*, tum vero fluere incipiet, atque augeri. In caſu altero contrarium accidet. Itaque prima ſemiordinatæ fluxio in priore caſu minimum aliquod conſtituet in puncto *M*, & maximum in caſu altero: hoc eſt, per *Probl.* 7., utrobique fluxio ipſius fluxionis, ſive ſecunda ſemiordinatæ fluxio evaneſcet, & ſi quæ aliæ fluxiones pariter evaneſcent, eæ numero pares erunt 2, 4, 6 &c, & quidem in primo caſu fluxio poſt omnes evaneſcentes ſuperſtes poſitiva erit, & in caſu altero negativa. Sive ergo maneat in puncto *M* prima ſemiordinatæ fluxio, ſive non, ſi evaneſcentium aliarum ſemiordinatæ fluxionum numerus fuerit 1, 3, 5, 7 &c curva inflectetur in puncto *M*: & ſi prima fluxio poſt omnes evaneſcentes ſuperſtes ſit poſitiva, curva *PML* ex concava fiet convexa, ex convexa autem fiet concava ſi eadem ſuperſtes fluxio ſit negativa. Et quia in ramorum diverſorum confiniis haberi etiam poteſt maximum, aut minimum evadente infinita prima fluxione ſemiordinatæ; flexus contrarius curvarum haberi etiam poterit ubi ſecunda ſemiordinatæ fluxio non evaneſcat quidem, ſed fiat infinita. Q. E I.

Co-

COROLLARIUM PRIMUM.

Ita ſi proponatur æquatio $ay=a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x^2$, & fiat ſecunda fluxio $-\frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}dx^2+2dx^2=o$, ibi habebitur punctum inflexionis ubi erit $x=\frac{1}{4}a$, & $y=\frac{9}{16}a$: & quia tertia, quæ ſupereſt fluxio, afficitur ſigno poſitivo, ſic comparata erit flexio, ut concavitatem curva in convexitatem mutet. Hic igitur rurſus deficit Hoſpitalii, aliorumque methodus, qui puncta inflexionis ex eo ſatis determinari exiſtimabant quod ſemiordinatæ ſecunda fluxio evaneſceret.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si prima ſimul, & ſecunda ſemiordinatæ fluxio pro eodem caſu eſſet nulla, in puncto inflexionis tangens fieret axi parallella: & contra eſſet tangens axi perpendicularis ſi prima ſemiordinatæ fluxio evaderet infinita. Valent hæc omnia de iis etiam curvarum inflexionibus, quibus regrediuntur curvæ ipſæ, & ad eamdem partem ex concavis fiunt convexæ, *fig.* 35. Quibus regulis regreſſus alii, & cuſpides curvarum, *fig.* 34., inveniri poſſint mox indicabimus.

PROBLEMA NONUM.

Invenire regreſſus omnes curvarum.

RESOLUTIO.

Si curva *FC*, *fig.* 19., verſus axem *FD* ſit concava, & fluat *BC* ex *F* verſus *D*, augebitur ſemper *FA*, quæ abſciſſarum origine, & tangente intercipitur. Quod ſi vero in puncto aliquo *C* ad originem ipſam curva regrediatur, intercepta imminui incipiet. Itaque intercepta $\frac{y\,dx}{dy}-x$ in pun-

puncto regressus evadet maxima, & fluxionem accipiendo fiet nulla, aut infinita in eodem puncto $\frac{dy^2 dx - ydxddy - dy^2 dx}{dy^2}$, sive $-\frac{ydxddy}{dy^2}$, adeoque etiam ddy. Si curva versus axem convexa proponeretur, foret $x - \frac{ydx}{dy}$ intercepta, & interceptæ fluxio $\frac{ydxddy}{dy^2}$. Quare ubi ddy fiat infinita, aut, si fiat nulla, non evanescant simul subsequentes imparis ordinis fluxiones, in utroque casu intercepta evadet maxima, aut minima, & curva regressum aliquem habere poterit in puncto C. Q. E. I.

COROLLARIUM.

Etiam si curva inflexionem simplicem sine regressu habeat intercepta ad C usque augeri, aut minui debet, ac postmodum contrariis gradibus minui, & augeri. Ut autem flexus, regressusque distinguantur inter se invicem, observandum est in curvæ regressibus, *fig.* 34., & 35., abscissæ maximum, aut minimum aliquod haberi: quod in inflexione simplici non contingit, *fig.* 32., & 33., Et quidem si regrediendo curva cuspidem exhibeat, *fig.* 34., semiordinata simul, & abscissa evadet maxima, aut minima.

PROBLEMA DECIMUM.

Data lege quantitatis cujuspiam crescentis, aut decrescentis, invenire quo in loco evadat maxima, aut minima.

RESOLUTIO.

Si proponatur variabilis quæpiam quantitas, quæ data lege, atque ad certum usque terminum crescat, tum vero decrescere incipiat, & definire oporteat quo in loco incrementum inter, decrementumque quantitas ipsa evadat maxima,

ma, aut minima; iisdem omnino regulis utendum erit. Potest enim quantitas omnis variabilis exprimi semiordinata variabili alicujus curvæ: unde quæ jam de maximis, aut minimis semiordinatis fuerunt dicta, valebunt etiam de maximis aliis, aut minimis quibuscumque. Exemplo rem omnem explicemus. Sit *PQ* recta positione data, *fig.* 36., & rectus angulus *ABC* moveatur circa verticem *B*, & quæratur quo in loco summa lateris *BC*, & lateris alterius *AB* ducti in constantem quantitatem *m* evadat minima. Fiat perpendiculum $BM=a$, $AM=x$, $AB=\sqrt{(a^2+x^2)}$, $BC=\frac{a}{x}\sqrt{(a^2+x^2)}$.

Si quantitatis $m\sqrt{(a^2+x^2)}+\frac{a}{x}\sqrt{(a^2+x^2)}$ prima fluxio accipiatur, atque ea exæquetur nihilo prodibit æquatio $mx^3=a^3$. Hoc autem substituto valore ignotæ x, non amplius evanescit secunda fluxio. Itaque si quærantur duæ mediæ proportionales unitatem inter, & quantitatem *m*, & fiat ut prima ad secundam ex ipsis duabus mediis ita $MA:BM$, erit *A* locus minimi. Q. E. I.

Sed potest etiam problema converti in aliud, in quo maximum aliquod quæratur: nam semper minimo aliquod maximum respondet, & vice versa. Ita si alicubi $m.BA+BC$ sit minimum, moto triangulo circa verticem, & ductis ad rectos angulos aliis quibuslibet Ba, Bc, erit $m.Ba+Bc>m.BA+BC$. Hoc posito triangulum Bac poterit semper recta aliqua *DF* rectæ *PQ* parallella sic dividi, ut sit $m.BD+BF=m.BA+BC$. In triangulo autem ipso *BDF* perpendiculum *Bm* semper erit minus perpendiculo *BM*. Propositum igitur problema huc recidet ut ex triangulis omnibus, in quibus constans est summa unius lateris, & alterius ducti in constantem quantitatem aliquam, quæratur illud, cujus altitudo sit maxima. Quod quidem sic reductum problema cum instituto calculo difficilior evadere videatur, Geometrice tamen, ope *Propos.* 41. *Lib.* 3. *Conic.* Apollonii, ad eosdem terminos facile reduci potest.

Quod si insuper consideretur in loco minimi fluxionem summæ $m.BA+BC$ nullam esse, &, ductis Ba, Bc infinite pro-

proximis, fieri $m.BA-m.Ba+BC-Bc=0$, patebit tertia resolvendi problematis hujus methodus, quærendo locum, ex quo dimoto aliquantulum triangulo, incrementum unius lateris æquetur decremento alterius ducto in constantem quantitatem. Quod rursus Geometrice præstari poterit. Scilicet si radiis BA, BC describantur circulares arcus AN, CR, erit $Na=\frac{AM.NA}{BM}$, & $Rc=\frac{MC.BC.NA}{BM.BA}$, adeoque $\frac{m.AM.NA}{BM}$ $=\frac{MC.BC.NA}{BM.BA}$: unde rursus eruetur $m.AM^3=BM^3$. Si triangulum ABC obliquangulum statueretur, paulo equidem longior, sed prorsus similis esset calculus.

Ita unico exemplo ob oculos posuimus triplicem methodum, quæ problematis hujus generis resolvendis potest conducere, nimirum aut fluxionem variabilis quantitatis nihilo exæquando, aut propositum minimi problema in problema alicujus maximi convertendo, & vice versa, aut quantitatem ipsam variabilem transferendo in locum proximum, atque incrementa, & decrementa coæquando inter se invicem. Prior methodus cum magis obvia, ac trita sit, sæpe sæpius magis expedita est tertia, & simpliciores, elegantesque Problematum hujusmodi solutiones suppeditat. Eadem etiam solvendis Problematis Isuperimetricis sufficiet, ut mox videbimus.

Problema Undecimum.

Determinare curvam, quæ proprietatem aliquam maximo, aut minimo gradu exhibeat.

Resolutio.

Accipiantur in curva quæsita AHE, *fig.* 39., bina elementa abscissæ BC, CD, semiordinatæ MG, NT, perimetri GT, TF, productaque GT in P ducantur duo alia alterius curvæ elementa GP, FP prioribus infinite proxima. Primo cum extremorum punctorum H, E distantia, & locus non detur, pendeatque ex vario constantium quantitatum

tum æquationem curvæ afficientium valore, proprietas eadem maximi, aut minimi quæsitæ curvæ convenire debet, quamcumque exiguam portionem extrema puncta intercipiant, debet scilicet convenire & toti curvæ, & singulis ipsius partibus: secus HG, & curva alia ex elementis aliis composita eamdem simul proprietatem maximo gradu, aut minimo præseferret. Deinde ex iis quæ modo diximus, consequitur non posse eamdem proprietatem elementis $BGTC$, $CTFD$ convenire, nisi etiam elementis $BGPC$, $CPFD$ ita conveniat, ut differentia omnis evadat nulla. Denique si radiis FT, GP describantur circulares arcus TO, PO, ob similitudinem triangulorum TNF, POT, & GMT, PoT prodibit $PO = \frac{NT.TP}{TF}$, & $To = \frac{MG.TP}{GT}$. Datis hisce omnibus si intelligamus elementa $BGTC$, $CTFD$ retinere proprietatem suam dum abeunt in elementa proxima $BGPC$, $CPFD$, æquationem habebimus hujus formæ $(X - X + dX).TP = o$, sive $dX = o$: quod indicabit fluentem X constanti quantitati esse æqualem, & æquationem curvæ quæsitæ suppeditabit. Q. E. I.

Exempli alicujus loco determinanda sit curva HTE ejus natuæ & indolis ut in ipsa corpus brevissimo tempore descendat: quod primum a Galilæo excogitatum problema est; ac deinde a Johanne Bernoullio propositum, & a Johanne simul, & Jacobo fratre, a Newtono, Leibnitio, Hospitalio, Fatio resolutum. Quia tempus est directe ut spatium percursum, & reciproce ut velocitas, velocitas vero in corporibus decidentibus æquatur radici altitudinis ductæ in duplam vim gravitatis, adeoque subduplicatam altitudinis rationem sequitur; quantitas $\frac{GT}{\sqrt{AB}} + \frac{TF}{\sqrt{AC}}$ ubique in quæsita curva erit minima. Hoc ipso fiet $\frac{GT}{\sqrt{AB}} + \frac{TF}{\sqrt{AC}} = \frac{GP}{\sqrt{AB}} + \frac{PF}{\sqrt{AC}}$. Quare cum sit $GP = GT - To$, & $PF = TF + PO$, deletis utrimque æqualibus supererit $\frac{PO}{\sqrt{AC}} - \frac{To}{\sqrt{AB}} = \frac{NT.TP}{TF\sqrt{AC}} -$

$\frac{MG.TP}{GT.\sqrt{AB}} = \frac{d.MG.TP}{GT.\sqrt{AB}} = 0$, & fluens quantitas $\frac{MG}{GT.\sqrt{AB}}$ constanti quantitati æqualis erit. Id vero in vulgari cycloide GFR, *fig.* 37. locum habet, in qua eſt $Nn : NQ = CM : MR = PM : PR = \sqrt{PC} : \sqrt{PR}$, adeoque eſt $\frac{Nn}{NQ.\sqrt{PC}} = \frac{1}{\sqrt{PR}}$.

Si in Plano inclinato deſcendat corpus perinde erit: quippe adhuc conſtans manebit vis, qua in plano inclinato corpus ad deſcenſum urgebitur, & ad vim abſolutam gravitatis ſe habebit in conſtanti ratione altitudinis plani ad longitudinem.

Si corpus in cycloide deſcendat, facile admodum oſtendi poterit arcum quemcumque FR eodem ſemper tempore percurſum iri. Quia enim velocitas corporis deſcendentis æquatur radici altitudinis ductæ in duplam vim gravitatis, erit tempus, quo abſolvetur arcus NQ ut $\frac{NQ}{\sqrt{2AC}}$. Quia vero cycloidis tangens NT parallella eſt ſubtenſæ MR circuli generatoris PMR, & eſt $CR : RM = Qn : NQ$; erit tempus ipſum ut $\frac{Cc.RM}{CR.\sqrt{2AC}} = \frac{Cc.\sqrt{PR}}{\sqrt{(2AC.CR)}} = \frac{Cc.\sqrt{PR}}{CO.\sqrt{2}}$, deſcripto ſcilicet ſemicirculo AOR. Eſt autem elementum circularis arcus $Oo = \frac{Cc.AV}{CO}$. Itaque tempus deſcenſus per NQ erit ut $\frac{Oo.\sqrt{PR}}{AV.\sqrt{2}}$, & tempus deſcenſus per totum cycloidis arcum FR erit ut $\frac{AOR.\sqrt{PR}}{AV.\sqrt{2}}$, ſive $\frac{PMR}{\frac{1}{2}\sqrt{2PR}}$, nimirum conſtans. In cycloide igitur oſcillationes omnes erunt æquidiuturnæ, & quia $\sqrt{2PR}$ exprimit tempus deſcenſus per diametrum PR, ſeu per dimidiam longitudinem penduli cycloidalis, erit tempus unius ſemioſcillationis in cycloide ad tempus deſcenſus per dimidiam longitudinem penduli ut ſemiperipheria ad diametrum.

Inde etiam alia deduci poſſunt. Ex. gr. ſi duo corpora oſcillentur unum in circulari arcu DR *fig.* 38., alterum in cy-

cycloidali FR, æquales erunt velocitates in locis O, & N, & tempora descensuum per arcus Oo, Nn erunt ut arcus ipsi. Est vero $Oo=\frac{BO.Cc}{CO}$, & $NQ=\frac{RM.Cc}{CR}=\frac{PR.Cc}{RM}$. Itaque tempus descensus per Oo erit ad tempus descensus per NQ ut $BO.RM:PR.CO$, sive ut $2RM:CO$, & cum sit $RM=\sqrt{CR.PR}$, $RO=2.\sqrt{CR.PR}$, erit tempus descensus in circulo ad tempus descensus in cycloide ut chorda arcus circularis RO ad ejus sinum CO. Quia demum imminuto arcu in infinitum ratio chordæ, & sinus evadit ratio æqualitatis, oscillationes etiam in minimis circuli arcubus erunt æquidiuturnæ. Male non nulli oscillationum æquidiurnitatem ex æquipollentia chordæ, & arcus deduxerunt: neque enim eadem chordæ, & arcus positio est. Insuper si eodem tempore in chorda, & arcu corpora descenderent, tempus dimidiæ oscillationis in arcu minimo æquaretur tempori descensus per totam diametrum, quod ex iis omnibus, quæ diximus, falsum colligitur.

PROBLEMA DUODECIMUM.

Invenire curvam, quæ plures simul proprietates maximi, aut minimi complectatur.

RESOLUTIO.

Si plures simul maximorum, minimorumque, & isoperimetricorum conditiones requirantur, plura curvæ elementa considerari debent: ut quoniam bina elementa singulis proprietatibus singillatim exhibendis sufficiunt, binis simul componendis terna, & plura pluribus inserviant. Id vero simili fere artificio præstabitur ac in antecedente problemate factum sit. Methodum omnem cum fusius exposuerit Eulerus *To. 6. Comment.* Petropolitanæ Academiæ, & in libro de lineis curvis maximi, minimive proprietate gaudentibus, rursus hoc loco exponere non vacat. Illud dumtaxat modo indicabimus, quod in problematis hisce solvendis usus am-

pliſſimi eſſe poteſt, ſcilicet ſæpe ſæpius pari facilitate problemata tractari omnia, eademque omnino methodo ex curvis omnibus, quæ proprietates A, B, C, D &c æque habeant, curvas illas decerpi, quæ proprietates alias F, G, H &c maximo gradu, aut minimo præſeferant, quæcumque ſit proprietatum propoſitarum complexio, & numerus. Si enim ſingulæ proprietates exhibendæ eſſent ſingillatim, ipſa problematis antecedentis methodo eruerentur æquationis totidem hujus formæ $(X-X+dX).TP=o$, $(Y-Y+dY).TP=o$, $(Z-Z+dZ).TP=o$ &c. Quoniam igitur proprietates omnes in una ſimul curva eſſe debent, compoſitis æquationibus prodibit $dX+dY+dZ$&c $=o$, aut, ſi homogenei inter ſe termini reddendi ſint, $dX+adY+b^2dZ$&c $=o$, ac denique ad fluentes veniendo erit $X+aY+b^2Z$&c $=C$. Q. E. I.

Exempli loco problemata illa proponamus, quæ Eulerus in Commentariis Petropolitanæ Academiæ ob proprietatum Iſoperimetricarum complexionem difficiliora eſſe cenſuit, & quibus propterea ſolvendis terna, & quaterna elementa curvæ adhibere voluit. Quæratur primo curva HTE, quæ inter omnes Iſoperimetricas maximam arcam AHE complectatur, *fig.* 39. Ob eumdem curvæ ambitum erit $GT+TF=GP+PF=GT-To+TF+PO$, & ſi ſola prior conditio ſervanda eſſet, inde erueretur $\frac{NT.TP}{TF}-\frac{MG.TP}{GT}=d.\frac{MG}{GT}TP=o$. Erit etiam ob maximam ſuperficiem curva comprehenſam $AB.MG+AC.NT=AB.\overline{MG-TP}+AC.\overline{NT+TP}$. Quare duabus ſimul conditionibus compoſitis, & facta $AB=x$, $BC=CD=dx$, $BG=y$, $MG=-dy$, $HG=s$, $GT=ds$, curva quæſita definietur æquatione $\frac{ady}{ds}=x+b$: quæ ſemper erit æquatio ad circulum. Si inter omnes Iſoperimetricas quæratur curva, quæ circa axem AH converſa gignet maximum ſolidum, inſtituto ut antea calculo ob novam hanc maximi ſolidi proprietatem eſſe oportebit $d.AB^2.TP=o$. Quare rurſus compoſitis conditionibus ejuſdem perimetri, & maximæ ſoliditatis prodibit æquatio a^2dy

$=x^2$

$= x^2 ds \pm b^2 ds$, qua etiam curvæ elasticæ natura exprimitur. Si curva HTE ea esse debeat, ut inter omnes alias per puncta H, E transeuntes circa axem AH conversa maximum solidum, & minimam superficiem simul gignat, ob minimam superficiem eruetur $AB.GT + AC.TF = AB.\overline{GT - TO} + AC.\overline{TF + PO}$, adeoque erit $d.\frac{\overline{AB.MG}}{GT}.TP = o$. Pariter ob maximam soliditatem erit adhuc $d.AB^2.TP = o$. Fiet igitur curvæ quæsitæ æquatio $axdy = x^2 ds \pm b^2 ds$, quæ in æquationem ad circulum degenerabit si sit $b = o$, ad catenariam vero si fit a quidem infinita, & $b^2 = ac$. Generatim enim si ex curvis omnibus Isoperimetricis quæratur, illa, quam suspensæ catenæ referunt, in qua scilicet centrum gravitatis maxime distat ab axe AH, sive in qua maxima est quantitas. $AB.GT$, servatis proprietatibus singulis prodibit $ady + xdy = bds$: & si sola catenaria inquiratur, erit $xdy = bds$.

Componamus etiam conditiones plures inter se, & inquiramus curvam, quæ ex omnibus Isoperimetricis maximam aream complectatur, & sua circa axem AH revolutione gignat maximum solidum. Illico habebimus $x^2 ds + bx ds - a^2 dy = c^2 ds$. Quod si ex curvis omnibus ejusdem longitudinis, ejusdemque areæ ea excerpenda sit, in cujus perimetro grave corpus celerrime descendat erit $xds - ady - \frac{bdy}{\sqrt{x}} = cds$. Pariter si ex curvis omnibus ejusdem areæ requiratur illa, quæ circa axem AH conversa gignat maximum solidum, quod tale insuper sit, ut motum secundum axis directionem patiatur minimam resistentiam; quia vis tota fluidi sub cylindrico annulo contenti est ut quantitas fluidi, sive ut $AB.BC$, hæc vero ad vim impressam perpendiculariter rectæ GT se habet ut $GT; MT$, & hæc rursus ad vim impressam secundum directionem axis ut $GT : MT$, ad conditionem minimæ resistentiæ tuendam oportebit ut sit $\frac{AB.BC^3}{GT^2} + \frac{AC.CD^3}{TF^2} = \frac{AB.BC^3}{\overline{GT - To}^2} + \frac{AC.CD^3}{\overline{TF + PO}^2}$. Inde vero eruetur $d.\frac{xdydx^3}{ds^4}.TP = o$: adeoque retentis singulis conditionibus hujus problematis erit

ax

$ax + bx^2 - \frac{x\,dy\,dx^3}{ds^4} = c^2$. Si ſumma omnium $AB.GT$ majo r eſſe debeat, quam in curvis aliis omnibus ejuſdem areæ, & longitudinis, fiet $ax + bx^2 = \frac{x\,dy}{ds} = c^2$. Conveniunt ſingulæ æquationes hujuſmodi cum iis, quas Eulerus citato in loco tria, & quatuor curvæ elementa conſiderando exhibuit. Videatur etiam ut Mac-Laurinus *lib.* 2. de Fluxionibus *cap.* 5. §. 931. & *ſequ.* problemata iſoperimetrica breviter docuit reſolvere methodo, quæ huic noſtræ maxime affinis eſt.

Addamus exemplis ſuperioribus alia quædam. Decreſcat vis, qua ſe attrahunt puncta omnia in ratione duplicata creſcentium diſtantiarum, & requiratur curva QHE, *fig.* 40., quæ maxime omnium attrahat corpuſculum L in axe HL conſtitutum. Erit attractio elementorum GT, FT ſecundum directionem axis ipſius exercita $\frac{GT.LR}{GL^3} + \frac{TF.LS}{TL^3} = \frac{\overline{GT - To}}{GL^3}.$ $LR + \frac{\overline{TF + PO}}{TL^3}.LS$, & inde eruetur $d.\frac{\overline{LR.MG}}{GL^3.GT}.TP = d.\frac{\overline{n\,dy + y\,dy.}}{(\overline{n + y}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}.ds} TP = o$, facta ſcilicet $LA = n$. Si vero quæratur curva, quæ non ipſa quidem, ſed ſuperficies revolutione circa axem genita attractionem maximam exerceat, erit $d.\frac{\overline{nx\,dy + xy\,dy.}}{(\overline{n + y}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}.ds} TP = o$. Si denique totum ſolidum attractionem maximam exercere debeat, quoniam, ut a Newtono demonſtratum eſt, attractio circuli radio RG deſcripti eſt $1 - \frac{LR}{LG}$, erunt elementa attractionis maximæ $MG - \frac{MG.LR}{LG} + NT - \frac{NT.LS}{LT} = MG - TP - \frac{\overline{MG - TP}}{LG}.LR + NT + TP - \frac{\overline{NT + TP}}{LT}.LS$: unde eruetur $\frac{d.\overline{n + y}.}{(\overline{n + y}^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} TP = o$. Poterunt hæ proprietates cum aliis quibuſcumque ad libitum componi. Ex. gr. ſi curva illius indolis eſſe debeat, ut circa axem

LH

LH conversa solidum gignat, quod præ aliis æqualibus maxima attractione polleat, erit $\frac{b^2 u + b^2 y}{(\overline{u+y}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = c^2 - x^2$.

SCHOLION.

Ut simul elementa omnia invenire possent Tyrones, quæ ad curvarum theoriam pertinent, nonnulla oporteret addere de dimensione arearum, curvarumque, & superficierum, ac solidorum revolutione earumdem curvarum circa axem aliquem genitorum. Verum quadraturarum, & rectificationum methodus ab aliis passim authoribus ad eum brevitatis apicem deducta est, ut nihil hacce in re amplius desiderari posse videatur. Nihil etiam hic novi superest, quod addi debeat, nisi quod respicit dimensionem corporum sic genitorum revolutione alicujus figuræ planæ circa axem, ut interim planum generans secundum axis longitudinem moveatur. Solida hujusmodi primus omnium considerare cæpit Torricellius in appendice problematis secundi de Solido Hyperbolico, & Cochleas, sive solida Cochlearia appellavit. Genesim sic descripsit. Consideravit duas figuras planas in eodem semper plano consistere, eodemque tempore moveri, rectangulum nempe motu circulari æquabili circa unum latus veluti circa axem, figuram vero aliam quamcumque motu progressivo secundum longitudinem oppositi alterius lateris. Soliditatem Cochleæ, & gravitatis centrum invenit Torricellius. Occasione quarumdam disputationum aliquot ab hinc annis in Academia nostra excitatarum nonnulla inventis Torricellianis addita sunt. Exponemus breviter summa capita postremæ hujus tractationis, quæ Curvarum theoriam respicit.

In primis quia per Corollarium tertium primi Theorematis curvæ *FC*, *fig.* 19., fluxio *Cc* est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; si ex data curvæ æquatione, juxta quartum, & quintum Theorema, eruatur valor fluxionis dx, aut dy, tota etiam fluxio $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ unica variabili exprimi poterit: tum si juxta scholium primæ partis ad fluentem veniatur, habebitur curvæ

væ propoſitæ longitudo. Sit æquatio curvæ $x^2 = y^3$, ſcilicet proponatur Parabola ſecundi ordinis, & parametri $= 1$. Erit $dx = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy$, & $\surd(dx^2 + dy^2) = \frac{1}{2} dy \surd(9y + 4)$. Jam vero $\frac{1}{2} dy$ eſt ipſa fluxio quantitatis $\frac{1}{18}(9y+4)$. Erit igitur tota fluens $= \frac{\frac{1}{18}(9y+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{27}(9y+4)^{\frac{3}{2}} + C$. Quia vero incipientibus ſemiordinatis, & facta $y = 0$, tota etiam perimeter debet eſſe $= 0$, fiet $\frac{1}{27} . 4^{\frac{3}{2}} + C = 0$, & inde eruetur $C = -\frac{8}{27}$, & longitudo totius perimetri Parabolici evadet $= \frac{1}{27}(9y+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$. Eodem modo ſi ſemiaxis major Hyperbolæ, aut Ellipſis ſit $= a$, minor $= c$, & abſciſſæ x a centro ſupputentur, erit elementum arcus Hyperbolici $= -\frac{dx \surd(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}{a \surd(a^2 + x^2)}$, Elliptici $= -\frac{dx \surd(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}{a \surd(a^2 - x^2)}$, circularis $= -\frac{a\,dx}{\surd(a^2 - x^2)}$, aut ſi radius circuli vocetur 1, erit peripheriæ circularis elementum $= -\frac{dx}{\surd(1-x^2)}$.

Fluxiones hujus generis non alia ratione ad fluentes reduci poſſunt niſi ope ſerierum infinitarum. Scilicet in infinitas ſeries evolvendæ ſunt radicales quantitates, deinde ſingulorum terminorum fluens eſt accipienda. Fluens tamen circularis arcus imaginariis quantitatibus poteſt exprimi. Sit arcus ipſe $= s$, erit $ds = -\frac{dx}{\surd(1-x^2)} = -\frac{dx}{\surd -1 . \surd(x^2 - 1)} = -\frac{dx(\surd(x^2-1) + x)}{\surd -1 . \surd(x^2 - 1).(\surd(x^2-1) + x)} = \frac{-dx - \frac{x\,dx}{\surd(x^2-1)}}{\surd -1 . (x + \surd(x^2 - 1))}$.

Jam vero fractionis hujus numerator eſt ipſa fluxio denominatoris per $\surd -1$ diviſa Itaque ſi logarithmorum modulus ſit $= 1$

$= 1$, erit $s = \frac{1}{\sqrt{-1}} . \log . (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$: quæ fluens completa eſt, quoniam in ipſa ſemiordinatarum origine, poſita ſcilicet $x = 1$, eſt etiam $s = \frac{1}{\sqrt{-1}} . \log . 1 = 0$. Si fiat $x = 0$, circularis arcus evadet quadrans, & fiet $s = \frac{1}{\sqrt{-1}} . \log . \sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}} . \frac{1}{2} \log . -1$, adeoque erit diameter ad peripheriam ut $\sqrt{-1} : \log . -1$.

Si c vocetur quantitas illa, cujus logarithmus æqualis eſt unitati, juxta logarithmorum regulas prodibit $s . \sqrt{-1} . \log . c = \log . (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$, & $c^{s\sqrt{-1}} = x + \sqrt{(x^2 - 1)}$. Inde etiam valor ſinus, & coſinus erui poterit. Erit enim

$$c^{s\sqrt{-1}} - x = \sqrt{(x^2 - 1)}$$

$$c^{2s\sqrt{-1}} - 2 x c^{s\sqrt{-1}} + x^2 = x^2 - 1$$

$$c^{2s\sqrt{-1}} + 1 = 2 x c^{s\sqrt{-1}}$$

$$\frac{1}{2} c^{s\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} c^{-s\sqrt{-1}} = x$$

$$\frac{c^{2s\sqrt{-1}} + 2 + c^{-2s\sqrt{-1}}}{4} = x^2$$

$$\frac{c^{2s\sqrt{-1}} - 2 + c^{-2s\sqrt{-1}}}{4} = x^2 - 1$$

$$\frac{c^{s\sqrt{-1}} - c^{-s\sqrt{-1}}}{2} = \sqrt{(x^2 - 1)}$$

$$\frac{c^{s\sqrt{-1}} - c^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sqrt{(1 - x^2)} = y.$$

Numerus ille cujus logarithmus æqualis eſt unitati facili ratione inveſtigabitur. Facile enim oſtendi poteſt eſſe $c^x = 1 + x \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{x^4}{1 . 2 . 3 . 4}$ &c. Nam ſi fiat $c^x = y$, & fluxiones æqualium fluentium accipiantur, erit $dy = dx + xdx$

$x\,dx + \frac{x^2 dx}{1.2} + \frac{x^3 dx}{1.2.3}$ &c $= dx(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ &c $) = y\,dx$. Inde vero eruetur $\frac{dy}{y} = dx$, $log.\, y = x$, ac denique $y = c^x$. Quod si igitur in priore serie $c^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ &c fiat $x = 1$, prodibit $c = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$ &c. Alia rectificationum methodi exempla sibi ipsi comparare poterit Tyro, aut ex aliis authoribus decerpere, qui solent exemplis hujus generis abundare.

Pariter cum juxta Corollarium primum Theorematis secundi areæ FCB fluxio sit $= y\,dx$, ex æquatione curvæ fluxionis ipsius valor deduci poterit, qui unica variabili exprimatur, iisdemque regulis tota curvæ area comparabitur: Ex. gr. in parabola Apolloniana cum sit $y = \sqrt{ax}$, erit $y\,dx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, & fluente accepta erit tota area parabolica $= \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy$, æqualis scilicet duabus tertiis partibus rectanguli ex semiordinata in abscissam. Similiter quoniam abscissis a vertice supputatis, & posito axe majore $= 2a$, parametro $= p$, est pro hyperbola quidem $y = \sqrt{\left(\frac{2apx + px^2}{2a}\right)}$, pro ellipsi vero $y = \sqrt{\left(\frac{2apx - px^2}{2a}\right)}$, erit elementum areæ hyperbolicæ $= dx\sqrt{\left(\frac{2apx + px^2}{2a}\right)}$, ellipticæ $= dx\sqrt{\left(\frac{2apx - px^2}{2a}\right)}$, circularis $= dx\sqrt{(2ax - x^2)}$.

Si solidum revolutione figuræ planæ FCB circa axem FB gignatur, superficiei fluxio erit ipsa fluxio curvæ Cc, ducta in totam circularis sectionis axi perpendicularis peripheriam, scilicet posito radio ad peripheriam ut $r : c$, erit fluxio superficiei $= \frac{cy}{r} . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Insuper cum sectio axi perpendicularis sit circulus, solidum etiam intelligi poterit genitum ex fluxu circuli, qui perpendiculariter eidem re-

rectæ feratur ſemper motu ſibi ipſi parallello, & cujus radius augeatur, vel imminuatur. Erit igitur fluxio ſolidi æqualis facto ex area fluentis circuli in fluxionem axis, ſcilicet $= \frac{cy^2 dx}{2r}$. Ita in ſphæroide elliptico cum ſit $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$, erit ſoliditatis elementum $= \frac{cpx\,dx}{2r} - \frac{cpx^2 dx}{4ra}$, & ſoliditas ſegmenti indeterminatæ altitudinis erit $= \frac{cpx^2}{4r} - \frac{cpx^3}{12ra}$, & ſphæroidis totius ſoliditas $= \frac{cpa^2}{3r}$.

Quod ſi etiam totum ſolidum non circuli hujus fluxu, ſed revolutione figuræ planæ FCB circa axem FB, ut antea, genitum intelligatur, eadem ſoliditatis formula habebitur. Eſſet enim conoidis ita deſcripti fluxio annulus ſolidus, qui gigneretur revolutione fluxionis CM areæ FCB circa axem ipſum. Quinimo ſi dum planum FCB revolvitur, motu quocumque æquabili, vel inæquabili ſecundum longitudinem axis AB feratur dextrorſum, vel ſiniſtrorſum, ſolidum inde genitum eadem ſemper ratione metiendum erit: ſcilicet cochleare ſolidum æquabitur ſemper conoidi, quod ſolo circulari motu ejuſdem plani circa axem deſcribi poſſet. Nam ſi planum quodcumque per axem ipſum traducatur, eadem erit ſectio in conoidali, & cochleari ſolido relicta, & æquabitur plano generati. Perinde etiam erit ſi planum generans dato intervallo quolibet ab axe diſtet, & ſemper cylindrum tangat, aut ſi inſuper tertium habeat motum, quo axi accedat, vel recedat. Dato enim angulo circa ipſum axem deſcripto, cochleæ ſoliditas æqualis erit alteri ſolido, quod iiſdem motibus acceſſus, receſſuſque ab axe gigneretur, poſito quod planum generans nullum alium habeat motum, quo ſecundum axis longitudinem feratur.

Ad ſuperficiem cochleæ quod pertinet, fiat ſemiordinata $BC = y$, tangens $AC = t$. Vocetur inſuper a diſtantia puncti alicujus ab axe, quod rotationis velocitatem æqualem habeat communi velocitati progreſſionis totius curvæ FCB ſecundum longitudinem axis AB. Sit denique dz elementum

arcus, quod a puncto ipso circa axem circulari motu describetur. Dico quod elementum cochlearis superficiei circulari motu ipsius curvæ, & progressivo æquabili genitæ erit = $\frac{dz}{a} . \sqrt{(a^2 + t^2)} . dy$, ac propterea pendebit ex rectificatione circuli, atque ex alia quantitate, quæ pro varia proportione circularis motus, & progressivi aliquando finitis terminis exhiberi poterit, aliquando autem involvet rectificationem hyperbolæ, aut ellipseos, aut curvæ alterius. Simplicissimus omnium casus est, in quo planum generans fit triangulum. Tunc enim cum tangens t sit semiordinatæ y proportionalis, superficies solidi cochlearis pendebit ex rectificatione circuli simul, & Parabolæ Apollonianæ. Si plani generantis distantia ab axe non maneat constanter eadem, sed augeatur in ratione quantitatis variabilis cujuscumque x, erit elementum cochlearis superficiei $= \frac{dz}{a} . \sqrt{(y^2 t^2 + a^2 y^2 \pm 2at\, y x + x^2 t^2)} . \frac{dy}{y}$, & si quantitas eadem x sit semiordinatæ y proportionalis fiet quæsitum elementum $= \frac{dz}{a} . \sqrt{(2t^2 \pm 2at + a^2)}\, dy$.

ME-

PAULLI FRISII
MEDITATIONES QUÆDAM
METAPHYSICÆ.

MEDITATIONES
METAPHYSICÆ.

CUm superioribus annis Metaphisicæ, atque Ethicæ institutiones publice traderem, singillatim eam partem considerare, atque explicare volui, quam Theologiam naturalem vocant, & quæ primæ, ac supremæ caussæ notionem respicit. Gravissimum proculdubio argumentum, & in quo immorari Philosophum ætate hac nostra potissimum, atque his temporibus plane decet, in quibus non sine magna veritatis, ac morum labe cavillationes, ac dubia quædam proseminant nonnulli, qui ens illud primum, ac summum, quo aliud melius nec esse, nec etiam percipi a nobis potest, cum extensione ac materia confundere ausi sunt. Quid vero? Plane is cæcutiat necesse est, qui hanc omnem cælestium corporum, ac terrestrium varietatem, pulchritudinem, ordinem circumspiciens, sese minime adduci sentiat ut ex tantis vicissitudinibus, ac motionibus tam multarum rerum, atque tantarum assurgat ad mentem quamdam supremam, ac perfectissimam, quæ præ sit, quæ imperet, & cui pareatur. Consentiebant hacce in re veteres Philosophi fere omnes: ut enim præclare est a Clemente Alexandrino primum, tum rursus a Cudwortho observatum, plures a Græcis Athei perperam vocati sunt, quod sine immenso cæremoniarum Gentilium apparatu unicam primam caussam venerantes popularia numina aspernarentur, Evehemerus ex. gr. quod Deorum Græciæ sepulchra, atque ortum indicaverit, Anaxagoras quod Mundum a mente per-

feсtiſſima fabricatum docens Solem ex Deorum canone abraſerit, atque ita Socrates, Protagoras, Ariſtoteles. Cicero *lib.* 1. *Tuſcul. Quæſt.* præclarum illud ſcriptum reliquit: *Nec vero Deus ipſe, qui intelligitur a nobis, alio modo intelligi poteſt, niſi mens ſoluta quædam, & libera, ſegregata ab omni concretione mortali, omnia ſentiens, & movens, ipſaque prædita motu ſempiterno.*

Hæc etiam apud veteres nationes omnes latiſſime ſententia obtinuit, ut colligitur ex eodem Tullio *lib.* 1. *de Nat. Deor.*, Platone *lib.* 10. de legibus, Ariſtotele de Cælo *lib.* 1. *cap.* 3, Diodoro Siculo *lib.* 12., Seneca *epiſt.* 117., Sexto Empirico *lib.* 8., Dione Chriſoſtomo *Orat.* 12. &c. Nunc autem ſi quæ nationes videri poſſunt nullam ſupremæ, & neceſſariæ cauſſæ notionem præſeferre, eæ nec tot ſunt quot ab aliis fuit jactitatum, & cum bardæ prorſus, ac ſtupidæ vim fere cogitandi omnem educationis barbaræ vitio amiſerit, potius ad Deum minime ſeſe convertere quam ignorare Deum cenſendæ ſunt. Cafros, atque Huttentotos, quos primi viatores religionis omnis extorres eſſe evulgaverant, ſupremam cauſſam agnoſcere, longiore illorum hominum ſocietate, & domicilio didicit Andreas Kolbi. Siamenſes, quos Johannes Lockius Louberii authoritate Atheis recenſuit, a Sinenſibus religionem habuiſſe acceptam, & religionis veſtigia habere undique, itinerariis omnibus, atque itineratoribus docemur. Braſilienſes ſylveſtres ab Atheiſmi nota, quam illis Lockius inuſſerat, ſatis vindicat in ſuo Dictionario Martinierius. Paraquariis nullam primæ, & ſupremæ cauſſæ cognitionem affulgere minus recte Nicolaus Del Techo ex eo deduxit, quod nullum Deo indicando, invocandoque habeant aptum vocabulum. Virginienſes enim, ut adnotat Lambertus, præter Solem quoddam idolum colunt, Kiwaſa nomine, quod conſulunt, & cui templa, & ſacerdotes, & feſta inſtituunt. Habent igitur manifeſta religionis alicujus veſtigia. Nihilo tamen minus apud eos populos nullum vocabulum inventum eſſe, quod proprie Deum ſignificet, ſatis conſtat ex Virginiana Bibliæ ſacræ verſione, quam anno 1663 characteribus noſtris Cantabrigiæ edidit Johannes Eliot, & in qua,

cæ-

cæteris Americane redditis, Dei vocabulo vocabulum *God* respondet, quod Anglicæ Deum exprimit. Primus versiculus ex. gr. *in principio creavit Deus cælum, & terram*, sic vertitur: *Weske Kutchissik ayum God Kesuk kah Onke*. Bibliæ titulus est: *Mamusse Wunneetupanatamwe Up Biblum God Naneeswe Nukkone testament kan Wonk Wusku testament*.

Quid vero hacce in re pluribus opus est? Licet enim efferati essent homines, aut barbaræ aliquot nationes sine religione penitus, & sine Deo; sane paucorum feritas, & ignorantia cæterorum authoritati officere nequaquam posset, & in tanta ætatum omnium, & cultiorum gentium consensione locum adhuc, ac vim haberet argumentum illud, quod ad probandam Dei existentiam in medium olim attulerunt Plato, Aristoteles, Tullius, Seneca, Plutarchus, & rursus proposuerunt Cudworthus, Benoestius, & Genuensis. Quod licet argumentum nonnulli infringere, & Bælius maxime conatus sit, jure merito tamen Genuensi in appendice ad *cap.* 1. *lib.* 3. Elementorum Metaphysicæ adhuc gravissimum visum est. Sive enim censeamus, ut ait ipse, ex uno communi fonte eam doctrinam derivatam esse, videlicet a primo quodam humani generis progenitore, & certissimo argumento est aliquando cæpisse, & originem habere hunc mundum, quod nonnisi ab aliqua sapientissima, potentissimaque caussa esse potest: sive dicamus deproptam fuisse ex rerum adpectabilium contemplatione, & eodem argumento conficitur Deum existere: quod enim evidens, quod perspicuum videtur omnibus non potest non esse verum. Huc pertinet illud Senecæ: *nemo omnes, omnes neminem, singuli singulos fallunt*.

Ut modo ab argumentis hisce moralibus, ut vocant ad Metaphysicas etiam, ac Physicas rationes procedamus, primo exordiendum est a conceptu entis æterni, & necessarii. Primo autem ex receptissimo illo axiomate, *nihil est sine ratione sufficienti cur potius sit quam non sit*, aliud manifeste videtur consequi: *si semel nihil fuit, semper nihil esse debuit*. Nam si semel nihil fuit, nulla etiam fuit semel sufficiens ratio, qua res aliqua existeret: adeoque nihil amplius esse potuit.

tuit. Ex hoc vero eruitur alterum, quod ut femel aliquid fit, nunquam nihil effe debuit, & aliquod debuit femper effe: hoc eft quod *fi femel aliquid eft*, *debet effe aliquod æternum*. Ut tertium demonftremus, quod *fi aliquod æternum eft*, *debet effe ens aliquod æternum*, & *a fe*, feries afcendentes rerum vocabimus, quæ in datum terminum definunt dato tempore; ut eft feries dati hominis ex. gr., patris, avi, atavi, &c: & feries defcendentes, quæ ex dato termino incipiunt dato tempore, ut eft feries dati hominis, filii &c: denique feries infinitas aut afcendentes, aut defcendentes, in quibus numerus terminorum numerum datum quemcumque fuperat. Ex quibus definitionibus præfto eft in ferie defcendente infinita nullum effe terminum ultimum: quicumque enim terminorum numerus affignetur, femper numerus major affignari poterit, quin ullus unquam terminorum affignandorum finis, ac limes fit. Jam vero feries afcendens infinita nihil eft aliud quam infinita feries defcendens contrarie fumpta, ut qui in defcendente eft primus terminus fit ultimus in afcendente, qui in defcendente fecundus eft in afcendente fit penultimus, atque ita termini omnes inverfo ordine fibi invicem refpondeant. Itaque fi in infinita ferie defcendente terminus ultimus nullus eft, *nullus etiam eft primus terminus in ferie alia afcendente infinita*: & fi feries cauffarum fit, hoc eft fi unus terminus fit cauffa, & fufficiens ratio termini alterius, non amplius licebit in infinitum afcendendo excurrere. Nullum enim habebit primum terminum, & fublato primo termino nullus effe poterit fecundus, tertius, quartus &c, & tota feries a primo termino infinite diffito incipiens evadet penitus impoffibilis.

His pofitis ad inftitutum noftrum redeamus. Si aliquod æternum debet effe, ut jam diximus, aut aliquod ens æternum a fe eft, aut ens unum ab alio pendet, & hoc ab alio rurfus, atque alio in infinitum. Verum, ut modo oftendimus, *nulla effe poteft afcendens cauffarum feries*, *quæ abeat in infinitum*. Itaque fi aliquod æternum eft, *eft aliquod ens æternum*, & *a fe*. Ex hoc theoremate tria alia manifeftiffime confequuntur. Primo ens æternum in fe ipfo complecti de-

debet sufficientem rationem sui ipsius, & rerum aliarum omnium, quæ sunt, quæ fuerunt, aut possunt esse: sive debet esse *summe providum, & omnipotens*. Deinde debet esse etiam *necessarium*. Nam si quod æternum, & a se est non est etiam necessarium, potuit non esse. Sed si ens æternum non fuisset, nec ipsum ens nec ens aliud potuisset esse. Ergo si potuit non esse ens æternum, potuit non esse quidquid est. Rursus quod est nunquam potuit esse impossibile, ut patet. Ergo ens æternum, & a se, debet esse etiam necessarium. Tertio quod a se est, ab alio non pendet, & quod necessitate suæ naturæ est, totam naturam suam in se habet. Ergo ab aliis rebus exterioribus nullo modo modo affici potest: sive extra se nullam habere potest caussam mutationis. Immutabilitas insuper videtur consequi ex conceptu ipso entis necessarii, & a se: videntur enim duo synonima immutabilitas, & necessitas.

Verum ut accurate ostendamus ens necessarium esse intrinsecus etiam immutabile, observandum est, quod si ens æternum, & necessarium in diversos actus transeundo intrinsecus mutaretur; actus unus sufficientem rationem complecteretur actus alterius subsequentis. Ut enim nihil fit sine aliqua ratione sufficiente, necesse est ut dum actum priorem habet ens æternum, habeat etiam sufficientem rationem subsequentis actus. Jam vero hujusmodi ratio extra ens æternum esse nequit, extra quod nulla est sufficiens ratio, ut jam vidimus. Intra autem nihil est aliud præter ipsum necessariæ, & æternæ naturæ actum. Oportet igitur ut actus ipse rationem sufficientem alterius actus complectatur. Hoc semel, atque alio rursus principio posito, quod nulla esse possit infinita ascendens caussarum quarumcumque, & sufficientum rationum series; præsto est quod si ens æternum, & necessarium actus quoscumque diversos habuit, infinitos diversos actus habere non potuit: sive, quod eodem recidit, ens æternum, & necessarium infinito tempore intrinsecus immutabiliter permansisse. Porro si ens æternum, & necessarium infinito tempore sine mutatione aliqua extitit, nullo unquam tempore mutari potuit. Nam si non ab æterno quidem, sed

dato tempore prima mutatio facta esset, in ipso antecedente, & infinitæ durationis actu ratio aliqua fuisset totius mutationis. Sed qui infinito tempore nullam rationem mutationis in se ipso complexus esset, idem immutabiliter permanendo nullam unquam mutationis rationem potuisset in se complecti. Itaque nullo unquam tempore mutari potuit ens æternum: sive est *extrinsecus, & intrinsecus immutabilis*.

Cætera, quæ proprietates primi ejusdem entis respiciunt, ex superioribus theorematis corollariorum more deduci poterunt. Si etenim neque intrinsecus, neque extrinsecus ens æternum mutari potest; non nisi unicus in ente ipso esse potest actus æternus, & necessarius: hoc est unico eodem actu, & nullo temporis aut præteriti, aut præsentis discrimine debet velle, intelligere, agere, complecti omnia. Et quia quod materiale est divisionem partium, diversamque dispositionem, atque ordinem continue suscipit; ens immutabile, unicum, simplicissimum, debet esse insuper immateriale, distinctumque ab Universo. Id vero ex æternitate etiam ipsius entis poterat antea colligi. Conciliari enim nequit æternitas, ac necessitas cum successivis modificationibus materiæ, ut perspicue explicavit Poliniacus *lib.* 3. Anti-Lucretii. Rursus si æterna dici nequit mens hominis, nulla potior ratio est, qua materiam, rem ignobiliorem, minusque necessariam, velimus esse æternam: quod argumentum nitide exposuit Lockius *lib.* 4. de intellectu humano *cap.* 10. Quæ vero adversus creationem materiæ inde argumenta deprompta sunt, quod nequeamus intellectu assequi quomodo materies, quæ non erat aliquando, aliquando esse cæperit, omnia illo unico axiomate refelluntur, quod in humanis quoque, ac naturalibus rebus habere locum in conversione Comitis Rochæ ostendit Episcopus Salisburiensis: quod scilicet minime idcirco inficiari debeat res aliqua quod nequeamus intelligere quomodo fit. Quis enim ex. gr. percipiet, quod tot observationibus constat, particulam materiæ quamcumque minimam alias omnes ubicumque positas trahere vi quæ decrescat in ratione duplicata crescentium distantiarum?

Qui æternitatem materiæ, & Mundi ſuadere authores argumento aliquo conati ſunt, plane ineptiverunt. Ariſtoteles cum a Deo Mundum conditum fuiſſe crederet, ab æterno fuiſſe conditum duodecim argumentis probare voluit, quæ magno quidem molimine ex antiquis Peripateticæ ſcholæ principiis refutare Benedictus Pererius aggreſſus eſt, minime tamen cæteros tangunt, qui non tenentur ſacramento Ariſtotelis, nec ſibi effata illa deglutiunt: ***materiam ingenerabilem eſſe, atque incorruptibilem: generationem ſine motu fieri non poſſe: ingenerabiles, incorruptibileſque eſſe cælos.*** Ejuſdem furfuris ſunt duodecim argumenta, quæ Averroes Ariſtotelicis adjecerat, & viginti alia, quæ ex Proclo retulit Philoponus. Singula poſt Pererium Genuenſis *Elem. Met. par.* 3. mera ſophiſmata, & pueriles captiunculas eſſe oſtendit. Nos ab iis recenſendis ſuperſedemus non ſolum quia minoris ponderis cenſemus eſſe, ſed etiam quia recentiores Materialiſtæ de levitate ſingulorum convenientes nobiſcum, æternitatem Mundi, & materiæ ſuadere aliunde aggreſſi ſunt, ex Hiſtoria naturali, Chronologia veteri, Aſtronomicis obſervationibus. Eamdem ob cauſſam non memoramus argumenta alia decem Lucretii Cari, quibus creationem materiæ ex nihilo ſic impugnavit, ut Poetis potius quam Philoſophis ſatisfecerit. Quid enim eſt quod tanto verborum apparatu objicit, ex ſpecificis ſuis ſeminibus oriri plantas, agros fertiliores reddi agricolarum induſtria, ex aliquo, quod antea extiterat, emergere omnia? Aliud plane eſt quod data exiſtentia materiæ ex materia fiant omnia, & aliud quod ex nihilo materies eadem non ſit facta: quod quidem non Poetice inſinuandum incumbebat Lucretio, ſed Philoſophice demonſtrandum.

Porro ſi mundum hunc adſpectabilem conſideremus, nihil inveniemus omnino, quod materiam increatam, improductam, æternam, aut vetuſtiorem quoque, quam receptiſſimæ traditiones ferant eſſe indicet: non artefactas moles, non perfectionem, atque amplitudinem ſcientiarum, non naturales alias productiones. Solent utique afferri in medium Chriſtallus Viennenſis, Chriſtallus montana, chriſtalliſationes, petri-

trificationesque nonnullæ aliæ, quarum cum massæ alicubi ingentes reperiantur, exiguum frustulum naturaliter efformari non nisi pluribus annis potest. At vero his etiam omnibus concessis pudet me idiotarum quorumdam, qui productionibus naturalibus regulam auream aptantes, ex quo decem annorum tempore ex. gr. primus christalli digitus coalescat, centum annis opus esse inferunt ut decem digiti absolvantur. Hæc supputandi ratio, quantum ovum ovo esse potest, alteri affinis est, qua cum una aquæ uncia ex. gr. decem minutis temporis ex aperto vasis foramine elabatur, deducat aliquis minutis centum esse opus ut decem unciæ elabi possint.

Solent etiam opponi portentosæ illæ Chaldæorum, Ægiptiorum, Sinensium chronologiæ. Fama est Chaldæos Alexandri Magni temporibus observationes Astronomicas jactitasse 473000 annis ante institutas: quamvis Porphirius, & Berosus, qui Antiochi sæculo vixerunt, nullas annis 1903 vetustiores memoraverint. Ægiptii tres Dynastarum series recensebant, Deorum, Heroum, Regum, quibus imperium annis 36525 traductum fuisse asserebant ad Nectanebum usque, qui ab Ocho Persarum Rege victus, ac pulsus est ante Alexandri Magni expeditiones. Sinenses denique imperium familiæ Hia demandatum fuisse dicunt plusquam 2000 annis ante Christum: septem alios reges, qui simul plusquam sæculorum septem intervallo imperaverint, priores statuunt: aliosque insuper immanis antiquitatis. At si accurate explores traditionum hujusmodi originem, si quæras quæ eorumdem sæculorum, aut proxime posteriorum saltem monumenta, & scriptores sint tantæ antiquitatis testes, ne unus quidem in medium proferri poterit. Sane Confucius anno ante Christum 551 natus, cum florentissimo imperii tempore, & ante combustionem librorum veterum scripsisset, missis veluti nimium dubiis, quæ sub Dynastis Hia, & Chang acciderant, a familiæ Tcheou imperio exorsus est, anno scilicet 1122 ante Christum. Antiquitatum earumdem fabulas, contradictiones, mendacia satis jam explicarunt Marshamus in Canone, Witsius in Ægiptiacis, & Duhalt in Sinæ descriptio-

ptione, ut mirum ſit Abbatem de Prades Lutetiæ Pariſiorum publice recoxiſſe hanc crambem, & cyclo Sinenſi quodam, ut Belgicarum epiſtolarum author oſtendit, male intellecto, imperii totius epocham longe ante diluvium conſtituiſſe.

Rem autem diremit prorſus Caſſinus, & Deguignes. Ille enim qua erat in rebus Aſtronomicis perſpicacia, & eruditione animadvertit veteres illas Sinenſium eclipſium ſupputationes ex tabulis Tychonicis fuiſſe erutas, dono alicujus Europæi, qui de Sinenſibus antiquitatibus bene mereri voluerit. Hic vero incredibili ſtudio Hiſtoriis Hunnorum omnibus conſideratis, demonſtravit certam Sinenſium Chronologiam non niſi aliquot ſæculis Chriſtianam æram anteceſſiſſe. Supereſt igitur hacce in re, quod pro tuenda originis noſtræ antiquitate addidit Cl. de Voltaire in ſuo ſpecimine Newtonianæ Philoſophiæ, Eclipticam, teſte Herodoto, fuiſſe aliquando Æquatori circulo perpendicularem: obliquitatem Eclipticæ, juxta Louvilleum, uno minuto primo ſingulis ſæculis imminui: adeoque annis 399000 fuiſſe opus ut Ecliptica angulo 66 graduum cum dimidio, ſive minutis 3990 recederet a perpendiculo. Hanc vero difficultatem, ſeu potius ſublimioris Phyſicæ ignorationem præoccupavimus ſupra ubi oſtendimus imminutionem obliquitatis Eclipticæ ex attractione aliorum Planetarum, & potiſſimum Jovis, ac Veneris pendere: una nodorum revolutione reſtitui Eclipticam in gradum priſtinum: & variationis totius differentiam uno gradu majorem eſſe non poſſe.

Sed quoniam a moralibus, & metaphyſicis rationibus ſenſim ad mundi, & corporum naturalium contemplationem dilapſi ſumus, præſtat hoc argumentum, quod phyſicum vocant, exponere ſingillatim, atque altius ex ſuis principiis derivare. Scilicet cum undequaque in natura univerſa non niſi motus, & peculiares vires cæleſtium corporum, ac terreſtrium deprehendamus, corpora omnia novimus eſſe inertia, atque otioſa, & quæ ſi quieverint aliquando, aut ad motum impulſa ſint, quietem, motumve impreſſum tueantur accuratiſſime, donec viribus aliis extrinſecus advenientibus alios motus ſibi comparare neceſſe ſit. Hoc naturalis otioſitatis, & iner-

inertiæ principium, quod tanto experimentorum, obfervationumque omnium confenfu in univerfam Aftronomiam, Mechanicam, & Phyficam induxerat Newtonus, nefcio cur e Metaphyfica penitus eliminare nonnulli aggreffi fint, qui cum motum gravitatemque, & vires alias ex fe corpora arbitrabantur, & natura fua præfeferre, videbantur etiam affèrere nullum effe opus entis alterius neceffarii, incorporei, & diftincti ab Univerfo: in quem plane fcopulum incauti homines minime prolapsi effent, si notionem, atque ideam corporum diligentius confuluiffent. Explicemus per partes fingulas hanc notionem.

In primis corpora abfolute extenfa effe, & enormiter falli Bælium dum extensionem realiter dari negat, & cum relativis aliis, ac fenfibilibus proprietatibus corporum confundit, manifeftum eft. Quæ proprietates nihil aliud funt in corporibus quam meræ difpositiones ad fenfus noftros impellendos, quæ intrinfecus corpora non afficiunt, fed in nobis metipsis fiunt, pendentque a variis organorum motibus, & mentis reflexionibus, relationibufque, color, fapor, odor &c, pro relationum, & motuum eorumdem diversitate differunt inter fe. Idem corpus a nobis coloratum, non coloratum a cæco aliquo concipitur: idem calidum uni, frigidum alteri, uni molle, alteri durum videtur. Durities infuper, frigus, calor ejufdem corporis poffunt percipi, & non percipi manente adhuc perceptione corporis. Quare si extensio ad genus harum proprietatum, aut relationum potius pertineret; ejufdem corporis extensio aliquando perciperetur, aliquando non, & aliquando extensionis perceptionem proprietatis contrariæ perceptio exciperet, ut perceptionem caloris excipit perceptio frigoris, & corpus, quod durum eft, evadit aliquando molle. At vero quænam in corpore proprietas extensioni contraria eft, quodnam eft corpus, quod sine extensione ulla aliquando poffit a nobis percipi?

Utique cum rem aliquam metiri nihil fit aliud quam invenire ipfius rationem ad quantitatem aliam ejufdem generis, quæ affumitur pro unitate; extenfionis etiam menfura non nisi relatione exprimi poterit: neque tamen propterea

rea quod de mensura dicitur ad extensionem totam traduci poterit. Utrumque simul confudisse Bælius, Nicolius, Malebranchius, Berkeleius, Lamius visi sunt. Animadvertit enim Bælius idem corpus, & magnum puero, & adulto homini referenti ad se omnia satis parvum videri posse. Nicolius etiam observavit quod si oculorum loco lentem aliquam haberemus, quæ corporum magnitudinem augeret, aut imminueret, omnibus data proportione auctis, aut imminutis relatio, & mensura communis extensionis maneret eadem. Pariter si quis esset ex infinite parvis iis Mundis, quos Johannes Bernoullius in Commercio epistolico proposuerat, & in quibus Planetæ, & homines, & cælestia, ac terrestria omnia corpora æquali proportione inter se invicem compararentur, quæ in Mundo hoc nostro locum habet; ii plane infinite parvi homunciones ejusdem magnitudinis res suas censerent, ac nos nostras censeamus, easdem mensurarum haberent ideas. Hæc vero, & alia his similia, quæ alii congerunt, quid demum probant? Ergo ne quia diversæ extensionis eadem idea, & diversa idem haberi potest ejusdem extensionis, cum relativis aliis, ac sensibilibus proprietatibus confundenda erit extensio? Minime gentium: neque enim proprietates sensibiles vere in corporibus non esse solum ex eo colligimus, quod magis, aut minus possint afficere idem corpus, sed ex eo quod esse & non esse possint, quod possint percipi, & non percipi, quod in idea corporum necessario non involvantur, quemadmodum involvi extensionem manifestum est.

Observandum est tamen ideam extensionis non ita pendere ab idea, & ratione corporis, ut cum sine extensione concipere nequeamus corpus, nequeamus etiam extensionem concipere sine corpore. Extensionis hujus, in qua scribo, adhuc eadem idea remanet, sive aerem suis parietibus intercludat cubiculum, sive intactis parietibus extrahatur aer, aut mente quomodolibet removeatur: & plane mirari subit hanc adeo nitidam extensionis simplicis ideam aliis Philosophis, Leibnitianis potissimum, Cartesianisque, confusam adeo, implexamque visam esse. Leibnitiani cum nullam pe-

nitus sufficientem rationem animadverterent, qua spatium vacuum relinqueretur, sine quo motus cælestium corporum, ac terrestrium deficere necesse esset, dixerunt vacuum nulla penitus naturæ facultate induci posse. Cartesiani, ut repugnantiam vacui defenderent, ad ineptias usque delapsi sunt. Fuerunt enim qui assererent spatium vacuum, quod dividi in partes, quod circumscribi, penetrari, & metiri potest, aut corpus, aut spiritum, aut nihil esse, & sublato intermedio aere putarent nihil amplius interjacere extremis parietibus cubiculi, & in suis adhuc locis permanentes parietes, distantia evanescente, se mutuo tangere. At quis non videt eductione aeris parietes, & distantiam parietum non affici? Nam licet nullum corpus intermedium relinquatur, potest tamen parietibus immotis aliquod, ut antea, esse intermedium, atque ad contactum duorum corporum requiritur ut nullum sit corpus intermedium, & ut manente corporum loco, nullum etiam intermedium esse possit. Ita unius anguli latera in summo vertice se tangunt, non quia nulla ibi magnitudo interponitur, sed insuper quia nulla, salvo laterum loco, interponi potest.

Datur igitur reale spatium, sive locus realiter a corporibus distinctus, qui plane locus relinqueretur si corpora omnia, aut tollerentur mente, aut ad nihilum reducerentur. Occupatur hoc spatium a corporibus, non quatenus duæ inter se distinctæ extensiones corporum, & spatii in extensionem unicam coalescant, quod Cartesiani nonnulli absurdum ex principiis antecedentibus dixerunt sequi, sed quatenus eadem, & communis tum corporum, cum spatii distinctio sit. Distinguitur spatium a corporibus eo potissimum discrimine, quod cum corpus in loco quolibet recipi, & collocari possit, in loco, in quo unum corpus est, aliud corpus collocari omnino non possit. Utique veteres scholastici compenetrationem corporum censuerunt divina virtute haberi posse, & quædam, quæ ex Religione accepimus, prodigia, quæque citra ullam compenetrationem a Sannazario, & Poetis aliis, ac veteribus quibusdam Patribus explicabantur, non alia ratione statuerunt fuisse habita, quam corporibus in eadem simul

mul ſpatii portione collocatis. Bælius etiam cum infinitæ diviſibilitati, & extenſioni abſolutæ corporum refutandæ operam daret, de more in rebus phyſicis balbutiens timuit, ne ſi quæ duorum corporum partes ſeſe tangentes dividi poſſent in infinitum, deberent ſuis dimenſionibus penetrari: minime vero animadvertit quod cum contactus non partium corporis, ſed ſuperficierum dumtaxat ſit, in infinitæ diviſibilitatis hypotheſi tangi, & uniri poſſunt ſuperficies, quin partes phyſicæ ſuperficiebus iis definitæ penetrentur. Hookius denique, & Hauksbejus cum obſervaſſent aquam communem, & oleum vitriolicum, poſt immixtionem, effervescentiam ſenſibilem, & modicam imminutionem ponderis, minus ſpatium ſimul quam ſeorſim occupare; novum penetrationis corporum principium protulerunt, & pluribus illud phænomenis aptarunt electricitatis, pulveris pyrii &c. Acidas tamen, & fixas olei particulas in libera aquæ interſtitiola prorependo ipſius particulas in minores alias ſecare poſſe, quæ ſibi magis contiguæ ſint, & ſine compenetratione ulla minus volumen fluidi componant, rei Chemicæ periti intelligent. Compenetrationem corporum intrinſecus abſurdam eſſe ex eo facile colligitur, quod ſi unum corpus ab alio penetrari, & in eodem ſimul loco eſſe poſſet, ex duobus corporibus dumtaxat unum conſurgeret, ſive duo corpora & duo ſimul, & unum eſſent.

Ex quo inſuper conſequitur impenetrabilia eſſe corpora natura ſua, non vero accidentali, & extrinſeca vi aliqua, quæ corpus unum ab alio ſegreget. Perperam Lockius exiſtimavit corpus nihil eſſe aliud quam ſpatium penetrabile, in quod divina virtute penetrare reliqua, & ingredi prohiberentur. Lockii ſententiæ affine eſt, quod nuper cenſuit Boſchovichius, impenetrabilitatem ex repulſionis vi oriri, quæ evaneſcente particularum ſeſe invicem evaneſcentium diſtantia ad infinitum uſque augeatur. Patet autem, quod Coſtius in notis Lockii obſervaverat, quibuſcumque viribus accedentibus nunquam ſpatium in corpus natura ſua impenetrabile converſum iri, neque magis vim exteriorem ad veram ſpatii impenetrabilitatem conducere, quam lorica ante pectus

posita efficiat ut pectus ipsum vulnerari amplius non possit. Porro si corpus non est ulla extensionis, quæ impenetrabilis reddatur, portio, sed est aliquid impenetrabile natura sua, quod spatio vacuo accedit, & extra spatium esse nequit; rationem extensionis communem quidem cum spatio habebit corpus, intrinseca vero, & propria impenetrabilitate secernetur a spatio vacuo, & definitione *per genus*, & *differentiam*, ut præcipiunt Dialectici, comparata appellari poterit *extensio natura sua impenetrabilis*.

Neque ita minus accurate exprimetur corporis essentia, quam exprimatur essentia hominis cum dicitur *animal rationale*. Potius mirari subit quod cum veteres de extensione, & impenetrabilitate diu disputaverint, ambas simul proprietates non composuerint ad definienda corpora, & Gassendus quidem in sola impenetrabilitate, & in sola extensione Cartesius essentiam corporum collocaverit. In quo uter magis erraverit nequeo dicere quamvis errasse utrumque certum sit: impenetrabilitas enim sine prævia extensione nequit intelligi, & extensio non solum corpori, sed etiam spatio vacuo convenit: essentia vero est forma rei, qua intrinsecus res ipsa constituitur, qua scilicet posita habetur res, & sublata aufertur. Ita impenetrabilitati, atque extensioni singillatim sumptæ deficient conditiones aliquæ, quæ ad indicandam essentiam corporis requiri debent, ut scilicet conveniat omni, & soli corpori, & reliquarum omnium proprietatum origo sit. Jam vero quodcumque corpus, nec nisi corpus sibi habet propriam extensionem impenetrabilem, ut antea diximus. Hoc ipso etiam quod corpus occupat spatium, & est indifferens natura sua ut hanc potius quam illam occupat spatii portionem, de una in alteram transferri potest, scilicet est mobile. Quibus denique proprietatibus generale mobilitatis principium acceptum habet, aptum efficitur peculiaribus aliis motibus excipiendis, qui ex viribus extrinsecis quomodocumque oriri possunt, ex gravitate, elasticitate, electricitate &c.

Hæ vero, & aliæ vires hujusmodi, quæ extrinsecus corpori advenire, & in corpora possunt recipi, neque ex impenetrabilitate, & extensione corporis necessario profici-

scun-

ſcuntur, neque cum extenſione impenetrabili neceſſario connexæ ſunt, adeoque eſſentia corporis ſatis definitur impenetrabili ipſa extenſione, & aptitudine aliarum virium extrinſecus recipiendarum, non autem viribus ullis intrinſecis, motibus, facultatibus, & principiis agendi. In primis enim extenſio impenetrabilis ex proprio conceptu exigit continuitatem aliquam partium, non peculiarem aliquam vim, quæ partes uniat, ac vetet dividi, & ſeparari: exigit aliquo in loco eſſe, & poſſe quidem de uno in alium locum tranſferri, non autem de uno in alium locum transferri oportere ex gravitate, attractione &c: nullam denique neceſſariam connexionem habet cum principio aliquo agendi, quod ex ipſa quaſi eruatur, ſicuti ex idea trianguli ex. gr. reliquæ omnes trianguli proprietates deduci poſſunt. Deinde poſſumus corpus concipere, quod ad dexteram, & non ad ſiniſtram, aut ad ſiniſtram, & non ad dexteram moveatur: quod attrahatur, & cohæreat cum dexteriore corpore, & non cum ſiniſteriore, aut cum ſiniſteriore tantum, & non dexteriore: quod gravitet in Terram tantum, & non in Lunam, aut in Lunam tantum, & non in Terram &c; adeoque poſſumus corpus concipere, quod neque ad dexteram, neque ad ſiniſtram moveatur, quod neque ex altero latere attrahatur, & cohereat, neque in Terram, neque in Lunam ſit grave &c, hoc eſt quod nullum habeat motum, attractionem, cohærentiam, gravitatem &c. Denique adhuc nitidam ejuſdem corporis ideam habemus, quantumcumque demum a Terra, & Sole diſtare corpus, & gravitatem minui intelligamus, velocitatemque ex gravitate, attractione, impulſu quolibet prognatam quomodocumque magnam, aut parvam eſſe.

Porro ſi gravitas, ſi vix motrix, ſi principium agendi aliquod eſſentiale eſſet corporibus, si non minus extensione impenetrabili, quam motu, & viribus quibuſcumque inditis eſſentia corporum conſtitueretur, non eadem plane haberetur idea corporum, levium, gravium, fluidorum, ſolidorumque, quieſcentium, & motorum: & quemadmodum sine extensione, aut impenetrabilitate concipi non poſſunt corpora, ita ſublata motus, gravitatis, & virium aliarum idea, nul-

nulla amplius idea corporum superesset. Exemplis veritatem manifestissimam illustremus. Quia tres proprietates ad circuli essentiam simul pertinent, ut sit primo figura plana, deinde ut lineæ unius circuitu complectatur, ac denique ut rectæ omnes ab aliquo interno puncto ad illam ductæ æquales sint; una aut altera ex tribus proprietatibus deficientibus, neque esse, neque ullo modo concipi potest circulus. Contra quia pari modo concipitur triangulum, sive æqualia, sive inæqualia inter se latera, & anguli intelligantur, ad essentiam trianguli non pertinent æqualitas, vel inæqualitas laterum, & angulorum. Et plane una omnium essentialium proprietatum ratio est. Essentiales proprietates sunt, quæ essentiam rei, sive formam rei intrinsecam constituunt. Quare si plures simul proprietates essentiales intrinsecus constituant rem aliquam, sine aliqua proprietatum singularum idea concipi, & intelligi res omnino non poterit: & si corpora pari modo intelliguntur sine motu, ac vi motrice, gravitate, attractione &c, certissimo argumento est attractionem, gravitatem, motricem vim essentialem corporibus non esse, nimirum corpora ex se inertia, & otiosa esse, & principio quocumque agendi penitus destituta.

Ex his principiis cum plura corollaria gravissima deduci possint, tum præcipue colligitur Newtonum, Cotesium, aliosque Newtonianos deceptos esse dum ille quidem impenetrabilitatem corporum non ratione, sed sensu agnosci existimavit, hi vero gravitatem non minus essentialem esse corporibus pronuntiarunt, quam sit impenetrabilitas, & extensio. Imprimis enim impetrabilia esse omnia corpora non inde solum eruimus, quod singula, quæ tractamus, impenetrabilia deprehendimus, sed ex eo quod repugnare intrinsecus agnoscimus penetrationem duorum corporum, & unius veluti ex duobus compositionem. Deinde ex eo quod gravitas, attractio &c sint generales cælestium corporum, ac terrestrium proprietates, non nisi malo vocabulorum abusu, & confusione inferri potest esse etiam proprietates essentiales. Si corpora omnia essent coloris rubri, aut sphæricæ figuræ, aut magnitudinis bipedalis, universales corporum proprieta-
tes

tes essent bipedalis magnitudo, figura sphærica color, ruber: neque tamen proprietates idcirco ejusdem ordinis cum extensione impenetrabili censendæ essent. Sine idea impenetrabilitatis, extensionisque idea corporis nulla est, & nihil plane corporis concipimus dum concipimus aliquid penetrabile, aut inextensum. Contra adhuc nitidam ideam corporis habemus dum aliquid impenetrabile, & extensum concipimus, quod non gravitet, non attrahat, non moveatur. Motus igitur, attractio, gravitas, & quæ aliæ vires in corporibus universi hujus omnibus, instituto experimento, atque observatione, deprehenduntur, sunt proprietates accidentales corporum adiectæ extrinsecus, & quæ servata semper essentia corporum esse, & abesse possunt: ipsa autem corpora essentialiter inertia, otiosa, & principio quocumque agendi destituta esse debent.

Ita notione corporum diligentius evoluta ens necessarium, immutabile, æternum, ac perfectissimum existere breviter conficitur. Quod enim natura sua iners est, quod omni principio agendi destituitur, quod motus & vires omnes extrinsecus acceptas habet, sibi profecto sufficiens ratio, & caussa esse non potuit cur esset, nec, si fuit aliquando, se certo ordine distribuere, & tot motibus impellere undique, & agitare potuit, nec jam conceptos motus, ac vires tantis vicissitudinibus temperare. Extra omnem igitur corporum collectionem sufficiens ratio, & caussa aliqua existentiæ, motus, & virium corporum quæri debet. Porro in toto incorporearum caussarum genere, aut caussa una a se est, & in se sufficientem rationem complectitur sui ipsius, & aliarum rerum omnium: aut singulæ ita invicem connexæ sunt, ut unaquæque pendeat ex alia, & principium ex alia ducat. Postremum hoc si esse posset, in continuata quavis caussarum incorporearum, & a se invicem pendentium serie, decem, centum, & omnes etiam caussæ hujusmodi, hoc est totum caussarum genus nec suæ existentiæ, nec existentiæ, motuum, & virium corporum sufficientem rationem in se ipso complecteretur: cum valeat in essentialibus progressio a partibus ad totum. Igitur caussa aliqua incorporea debet esse, a qua cum pendeant reliquæ caussæ omnes, ipsa a nulla alia pen-

pendeat, & ex se, & necessitate naturæ suæ existat, nec ullo unquam tempore potuerit non existere: & quia quod in se necessarium, æternumque est, vicissitudinis alicujus, & mutationis caussa sibi met ipsi intrinsecus esse nequit, & cum a nullo alio principio pendeat nullam extrinsecus mutationis caussam habere potest; incorporea, necessaria, & æterna eadem caussa penitus etiam immutabilis sit oportet.

Insuper quæ necessaria, & immutabilis caussa est, non potest plus esse quam vere est: sive est illud omne quod potest esse. Quidquid enim non est omne illud, quod potest esse, potest plus esse quam vere est: & quidquid potest plus esse, mutari potest. Jam vero si familiari perfectionis vocabulo realem aliquam significationem velimus assignare, dici debet perfectum id quod est, & perfectius id quod est magis, majorem scilicet proprietatum numerum, extensionemque in se complectitur. Huc etiam redit Genuensis definitio dum statuit rem aliquam perfectam esse, aut attributorum numero, & præstantia, aut unitate, & simplicitate, aut quod fini suo apta sit, & quod ideæ suæ respondeat. Caussa igitur quæ majorem amplitudinem existendi habet, quæ proprietates omnes in se complectitur, quas habere potest, est undique perfectissima. Rursus quæ perfectissima caussa est, multiplex esse nequit. Nam si esset multiplex, uni caussæ deficerent alterius perfectiones, & unaquaque perfectius aliquid esse posset. Præterea aut unaquæque rationem sufficientem existentiæ rerum omnium in se haberet, atque ita plures superfluæ essent: aut neutra haberet, & neutra esset suprema caussa: aut haberet alterutra, & ea dumtaxat suprema caussa appellari posset. Quæ igitur immutabilis, & perfectissima caussa est, non nisi unica debet esse.

Debet etiam in se complecti quidquid ad suæ perfectionis, felicitatisque incrementum pertinet, beatissima, in se optima, aliis maxime benefica, immensa, & infinita. Primo enim quo modo ex divinæ naturæ perfectione absoluta Dei bonitas colligitur, ex absoluta bonitate quæ relativa est, & quam continua beneficiorum serie experimur, omnino profluit, ut fert veterum Platonicorum effatum, ***bonum sui diffusi-***

fusivum esse, & summum summe. Deinde si limitem, terminum, finem aliquem pateretur suprema caussa, si non esset infinita quoque & immensa, non esset illud omne, quod potest esse, sive & plus esse, & mutari posset. Et quia caussa incorporea nec spatium occupat, nec extensione aliqua metitur, non nisi actione, & virtute sua cuicumque actioni, & cuicumque loco præsens erit: id quod Cudworthus, Clarkius, Henricus Morus, aliique authores cum improbarent, statuerentque supremam caussam substantia sua diffundi ubique, & immensitatem consistere *in indistantia a rebus, & locis singulis*; statuere visi sunt ipsam spatii vacui, & infiniti substantiam Deum esse. Antonius Genuensis eamdem opinionem Newtoni tribuit. Is vero cum docuisset Deum existendo semper, & ubique durationem, spatium, æternitatem, & infinitum constituere, se hæc omnia non ita accipere quatenus Deus sit ipsum spatium indicavit satis ubi ait: *non est æternitas, & infinitas, sed æternus, & infinitus: non est duratio, & spatium, sed durat, & adest*. Et plane aut nihil aliud est spatium vacuum, quam mera negatio corporis, & ad divinam, & perfectissimam essentiam pertinere nequaquam poterit: aut si mera negatio corporis esse nequit quod sublatis corporibus remaneret, quod satis sine ullo corpore concipitur, quod ex distinctis partibus coalescit, si spatium vacuum cum Hartsoekerio, Gassendo, Musschenbroekio, aliisque autoribus censeatur positivum, & reale aliquid; concedendum etiam erit quod fuerit a Deo conditum; quod possit aliquando destrui, quod finem, ac limitem non excludat natura sua, atque ita nullus amplius tritis quæstiunculis de immensitate, & duratione spatii locus superit.

Insuper quæ perfectissima, & suprema caussa est, in se ipsa complecti debet sufficientem rationem singularum rerum, quæ sunt, aut fuerunt, aut erunt aliquando, aut possunt esse, in se ipsa videlicet debet complecti ideas archetypas, sive exemplaria præsentium rerum, præteritarumque, ac futurarum, & possibilium, atque in se res omnes intelligere. Falsum est ergo quod opinabantur olim Platonici de æternis

exemplaribus extra Deum exiſtentibus, & jure merito recentiores Platonici ab ea ſententia, quæ Dei naturæ adeo repugnans eſt, deſciverunt; nec archetypas ideas diſtinxerunt a divina ſubſtantia, ut apud Plotinum, & Auguſtinum videre eſt. Quia vero naturæ neceſſariæ, & immutabili nihil variabile miſceri poteſt, immutabilis etiam erit cognitio, & ſcientia primæ cauſſæ, & in tantis mundanarum rerum viciſſitudinibus res ſingulas, & rerum ſingularum ſucceſſiones, combinationeſque, hoc eſt mutabilia omnia intelliget immutabiliter. Et quia in cauſſa incorporea, & ſimpliciſſima nulla partium compoſitio, & diſtinctio poteſt eſſe, ſequitur cauſſam ipſam in ſe ſimul intelligere, & videre omnia eodem tempore, & ſine ulla aut futuri, aut præteriti diverſitate. Falſum eſt igitur cognitiones divinas alias aliis priores, aut poſteriores eſſe, & probe cavendum eſt ne humanarum cognitionum indolem cognitioni divinæ adjudicemus.

Pariter cum a nullo exteriore principio pendeat ſuprema cauſſa, nec niſi a ſe ipſa ſit, non poterit impelli extrinſecus, & ad agendum determinari. Intrinſecus etiam ex ſuæ naturæ neceſſitate determinari non poterit ad hoc vel illud extra ſe agendum, adeoque intrinſecus, & extrinſecus erit libera. Primo enim tota Dei natura in ſe eſt, nec neceſſario ferri debet niſi in ſe ipſam: deinde quæ exteriores res neceſſario cum divina natura connecterentur, neceſſariæ eſſent, æternæ, perfectiſſimæ, communemque haberent cum prima, & ſuprema cauſſa rationem exiſtendi, nec de una in aliam formam tranſire, & novis accidentibus paſſim affici, & novas modificationes adipiſci poſſent. Quare cum modificationes ſubſtantiæ Dei appellavit Spinoſa res omnes hujus Univerſi, & fieri voluit neceſſitate naturæ Dei, & ſolis divinæ naturæ legibus, non minus erravit ipſe, quam cum humanos affectus omnes triſtitiam, metum, furorem, deſperationem in una beatiſſima, atque optima Dei ſubſtantia accumulavit, aut cum unicam eſſe voluit Univerſi ſubſtantiam quæ extenſa eſt, adeoque ex infinitis partibus extenſis, in infinitum ſemper diviſibilibus, & inter ſe diſtinctis coaleſcit. Quod ſi vero Deus intrinſecus, & extrinſecus liber eſt, aliud

pari-

pariter ex jam dictis consequetur, Deum videlicet non agere nisi quia vult, & divinam voluntatem sibi met ipsi sufficientem rationem agendi esse. Mihi libertatem omnem divinam sustulisse Leibnitiani Philosophi visi sunt, dum nihil Deum posse agere censuerunt, nisi sufficientem rationem in rebus, in quibus agit, inveniat. Quod si amplius non est quærenda exterior ratio, propter quam agat; nulla erit similium partium repugnantia, mundus hic noster necessario non erit omnium possibilium optimus, atque alia Leibnitianæ Philosophiæ capita omnino corruent.

Denique suprema, & infinita caussa erit omnipotens, & infinite plura, & majora poterit efficere, quam nos possimus intellectu assequi. Inde autem consequetur denuo incomprehensibilitatem rei alicujus non esse sufficientem rationem rei negandæ, & illæ omnes difficultates evanescent, quæ hacce in re afferri solent, & quas in suo Dictionario Historico Bælius perstrinxerat articulo Simonidis: quod scilicet non percipiamus quomodo existat aliquid, quod nulla spatii portione definiatur: quomodo cum Deus ob spiritualitatem suam sit nullibi, ratione immensitatis sit ubique: cum sit necessarius, & immutabilis sit etiam liber &c. Prior autem omnipotentiæ notio sic accipienda erit, ut cum Deus possit efficere ea omnia, quæ possunt fieri, cætera, quæ repugnantiam, & contradictionem intimam involvunt, efficere omnino non possit. Ita non poterit ens aliquod producere, quod cum a se ipso non sit, simul sit perfectissimum, & optimum, aut creaturas liberas simul, & indefectibiles constituere, aut mala creaturarum omnium impedire. Neque etiam poterit essentiam rei cujuspiam immutare, manente eadem re. Ita enim simul res esset, & non esset: esset nimirum ex data hypothesi, & non esset ob essentiæ defectum. Cum nullus igitur divinæ omnipotentiæ terminus, ac limes sit, hæc perfectio, & complementum veluti omnipotentiæ divinæ erit, ut neque Deus sibi met ipsi contradicere, neque rerum essentias mutare possit, neque inertiam naturalem, otiositatemque corporum ita adimere, ut ex se corpora, & sublata exteriore caussa moveantur, aut dum motum extrinsecus recipiunt,

alio ipſum dirigant, augeant, imminuant. Erit etiam impoſſibile ut corpora velint, cogitent, intelligant. Id vero intererit motum inter, cogitationemque, quod cum corpus moveri poſſit exteriore aliqua vi, cogitare omnino non poſſit. Quia enim nihil aliud eſt cogitare, quam rerum ideas in ſe producere, ſeparare, conjungere, alias ex aliis derivare, revocare jam habitas &c; ſine intrinſeco aliquo agendi principio cogitatio eſſe non poſſet, & ſemper agerent corpora cum cogitarent. Contra dum exteriore vi transferuntur de loco in locum, & motum impreſſum conſtanter retinent, nec quidpiam de ſuo adjiciunt; paſſive ſemper ſe habent.

Perperam Lockius ex eo quod cognitiones univerſim ſumptæ magis limitatæ ſint, quam ſint ideæ, collegit minime a nobis dignoſci poſſe utrum materies cogitationis particeps poſſit evadere, nec ne. Aliud quippe eſt quod non ſemper ad eas res pertingat cognitio, ad quas uſque extenduntur ideæ: aliud quod nunquam extendi eouſque poſſint. Primum dum Lockio concedimus, non ſequitur etiam alterum verum eſſe. Quot enim & ideas ſimul, & cognitiones habemus earumdem rerum? Habemus ideam quadrati, ideam ſegmenti Parabolici, & ideam ejus, quod indicatur vocabulo æqualitatis, & ſcimus inſuper quadratum eſſe ſegmento Parabolico æquale: habemus ideam circuli, & ideam quadrati circulo inſcripti, aut circumſcripti, & ſcimus circulum non eſſe quadrato inſcripto, aut circumſcripto æqualem. Pariter ideæ corporis ideam inertiæ neceſſario connexam eſſe intelligimus, & ſcimus cogitandi vi inertiam adverſari, adeoque ſimul copulari inertiam, cogitationemque nequaquam poſſe. Neque eſt quod ad tenebras noſtræ ignorantiæ confugiat Lockius, & ex quo plura alia non cognoſcamus, inferat minime a nobis cognoſci poſſe utrum materies cogitationis particeps poſſit evadere nec ne. Hæc mihi argumentandi ratio ſemper alteri ſimilis viſa eſt, qua ex quo circulus rectificari, & quadrari nequit, inferret quiſpiam nec Parabolam Apollonianam quadrari poſſe, nec quam vocant Nælianam, & cubicam rectificari. Sed tamen audiamus Lockium. Ait nobis æque incompertum eſſe quomodo materies cogi-

cogitet, & quomodo exiſtant ſpiritus, & ſpiritus conjungantur materiæ, & materia agat in ſpiritum, & vice verſa: tum ſubdit ſpiritus exiſtere, & corporibus copulari, & agi, & agere in corpora: ac denique concludit nullam eſſe potiorem rationem, qua materiæ cogitantis poſſibilitatem, aut exiſtentiam inficiemur. Hoc *cap.* 4. *lib.* 3. argumentum propoſuit, & occaſione diſputationis in Anglia exortæ Stillingfleectio rurſus objecit. At vero non ſolum minime percipimus quanam ratione cogitare poſſit materies, ſed manifeſtam contradictionem deprehendimus materiam inertem, otioſamque inter, & vim, facultatemque cogitandi. Aliis Lockii ſcrupulis Stillingflectius videtur ſatisfeciſſe. Nos hæc, quæ ex noſtris principiis conſequebantur, noluimus præterire.

INDEX

INDEX

TOTIUS OPERIS

TOMI PRIMI.

De

De

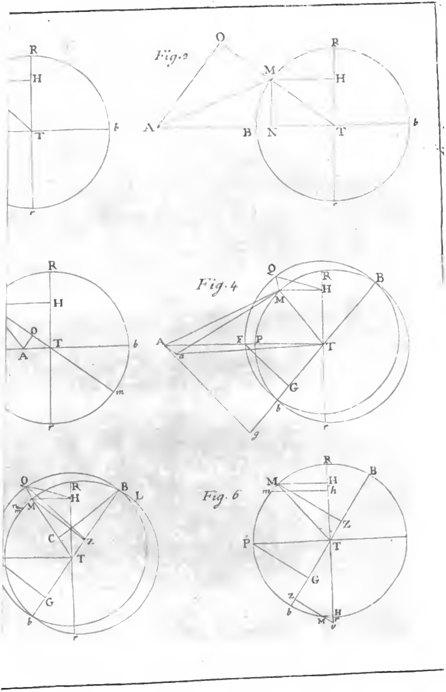
INDEX

TOMI SECUNDI.

De

ERRA-

Pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE.
21.	3.	$315\, b^2\, x$	$315\, b^2\, x^3$.
38.	2.	$= w\, \pi$	$- w\, \pi$.
	17.	$v\, z$	$v\, Z$.
49.	2.	cofinus	finus .
65.	6.	$b\, a^3$	$4 b\, a^3$.
74.	15.	$- + 15$	± 15.
84.	5.	$\pm \infty\, n$	$\pm \infty\, n$.
89.	23.	accelerari	retardari .
110.	27.	$\mp b . - \mp b$	$\mp b$.
112.	6.	$+ b$	$\mp b$.
146.	16.	fumenda	fumenda .
153.	17.	non fuperet . . . . . . , . .	non fuperet, & primam habeat extra fignum .
162.	17.	detegerit	detegeret .
165.	14.	paremetri	parametri .
168.	12.	*a* communi	a communi .
180.	13.	$t\, e$	$t\, c$.
184.	21.	ifuperimetricis	ifoperimetricis .
185.	2.	natuæ	naturæ .
190.	3.	$= \frac{x\, dy}{ds}$	$+ \frac{x\, dy}{ds}$.
200.	16.	amiferit	amiferint .
201.	2.	Anglicæ	Anglice .


Fig. 2
Fig. 4
Fig. 6

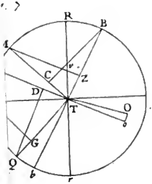


Fig. 8

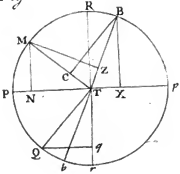


Fig. 9

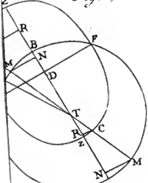


Fig. 10

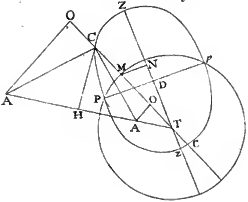


Fig. 11

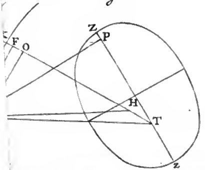
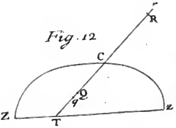


Fig. 12





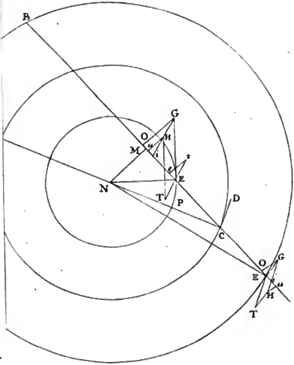
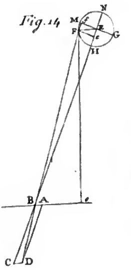


Fig. 14



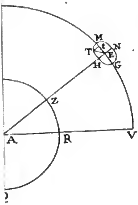


Fig. 16

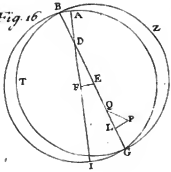
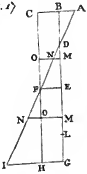


Fig. 17



18

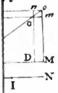


Fig. 19

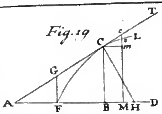
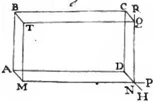


Fig. 20



21

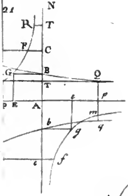


Fig. 22

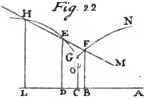


Fig. 23

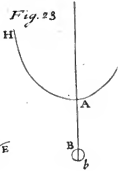
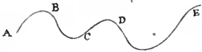


Fig. 25



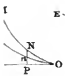


Fig. 26

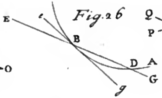


Fig. 27

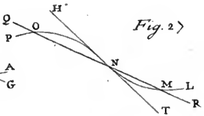


Fig. 28

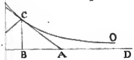


Fig. 29

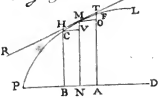
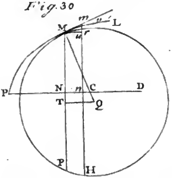


Fig. 30



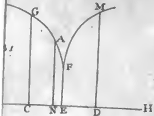


Fig. 32

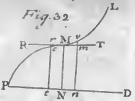
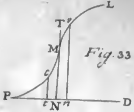


Fig. 33



g 34

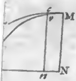


Fig. 35

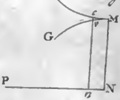
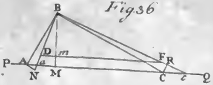


Fig. 36



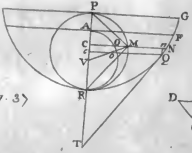


Fig. 37

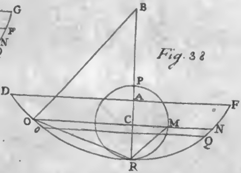


Fig. 38

Fig. 39

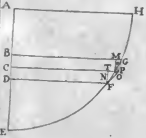


Fig. 40

